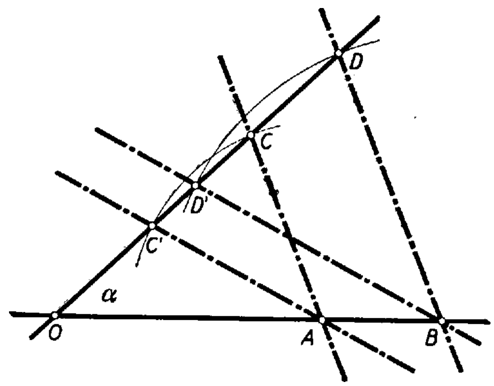
I. megoldás: Képzeljük megoldottnak a feladatot (lásd az 1. ábrát).



1. ábra

A párhuzamos szelők által létesített két háromszög: $OAC_\triangle$ és $OBD_\triangle$ hasonlóak, és így a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$AC : BD = OA : OB,$$

vagyis az $AC + BD = d$ szakaszt $OA : OB$ ismert arányban kell felosztanunk.

A szerkesztés menete tehát: először a d szakaszt felosztjuk a fenti arányban (ez történhet pl. hasonlóság segítségével). Utána az OA-nak megfelelő résszel A-ból, OB-nek megfelelő résszel B-ből rajzolt körívek metszik ki a másik szögszárból a C, ill. D pontot.

Ha az A-ból húzott körív érinti a szög másik szárát (s akkor a B-ből húzott is érinti), a feladatnak csak egy megoldása van. Ez akkor következik be, ha (α-val jelölve az adott szöget)

$$d = AC + BD = (OA + OB)\sin\alpha.$$

Ha $d < (OA + OB)\sin\alpha$, a feladatnak nincs megoldása.

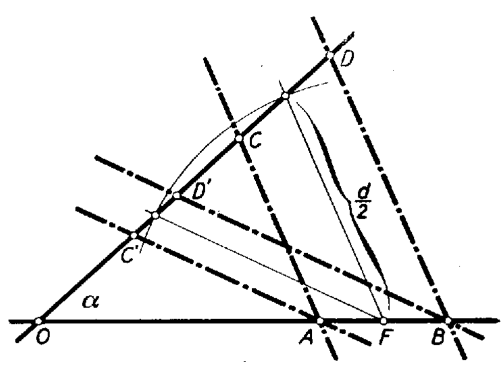
Ha viszont $d > (OA + OB)\sin\alpha$, akkor lehetséges az, hogy a kör egy második metszéspontban is metszi a másik szög szárát, de lehet, hogy csak a csúcson túl a meghosszabbítást metszi. Ha a szögszár meghosszabbításán levő metszéspontokat is elfogadjuk megoldásnak, akkor a feladatnak ez esetben mindig két megoldása van.

A szerkesztés és a megoldhatóság elemzése ugyanígy érvényben marad, ha az α szög tompaszög. (A körív érintésének esetében a kör csak a tompaszög szárának meghosszabbítását érinti, a tompaszöget α-val jelölve ez akkor következik be, midőn $d = (OA+OB)\sin(180^\circ - \alpha) = (OA+OB)\sin\alpha$. Sőt akkor is helyes, ha az A és B pont az egyik szögszáron és meghosszabbításán úgy helyezkednek el, hogy az O pont elválasztja őket.

A feladatot tovább általánosíthatjuk még úgy is, hogy nem két, hanem n pontot adunk meg a szögszáron: A_1, A_2, ..., A_n. Ekkor a d szakaszt az $OA_1 : OA_2 : \ldots : OA_n$ arányban n részre kell felosztani s a megfelelő szakaszokkal metszeni a másik szögszárat.

Fejes László (Makó, József A. g. II. o. t.)

II. megoldás: Újabb szerkesztési eljárást adunk arra az esetre, ha az A és B pontokat az O nem választja el. Képzeljük megoldottnak a feladatot (2. ábra).



2. ábra

Az $ABCD$ négyszög trapéz, középvonala a két párhuzamos oldal összegének a fele, vagyis $\dfrac{d}{2}$ hosszúságú.

Ennek alapján a szerkesztés: az AB szakasz F felezőpontjából $\frac{d}{2}$ sugárral rajzolt kör metszi a másik szögszárat, az F pontot ezzel összekötve a trapéz középvonalát kaptuk meg. A középvonallal A-ból és B-ből húzott párhuzamosok lesznek a keresett egyenesek.

A megoldások számának elemzése ugyanúgy történhet, mint az I. megoldásban.

Hajna János (Pécs, Széchenyi g. II. o. t.)