I. megoldás: Keressünk összefüggést az ismeretlen két oldal és a terület közt. Az $\frac{abc}{4t} = r$ és $t = \varrho s$ képletek felhasználásával

$$bc = \frac{10t}{3} \tag{1}$$

és

$$t = 2s = 6 + b + c,$$

amiből

$$b + c = t - 6. \tag{2}$$

A Heron-képlet szerint, mivel $s = \frac{t}{2}$,

$$t = \sqrt{\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2} - 6\right)\left(\frac{t}{2} - b\right)\left(\frac{t}{2} - c\right)},$$

azaz

$$t^2 = \frac{t}{2}\left(\frac{t}{2} - 6\right)\left[\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}(b + c) + bc\right].$$

Felhasználva (1)-et és (2)-t, és t^2-tel osztva

$$1 = \frac{1}{t}\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} - 6\right)\left[\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}(t - 6) + \frac{10t}{3}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} - 6\right)\left(\frac{t}{4} - \frac{t - 6}{2} + \frac{10}{3}\right).$$

A törtek eltávolítása és a zárójelek felbontása után ebből t-re a következő másodfokú egyenletet. kapjuk:

$$3t^2 - 112t + 960 = 0.$$

Ennek gyökei $t_1 = 24$, $\quad t_2 = \frac{40}{3}$.

Ha t értéke 24, akkor (1) és (2) szerint

$$bc = 80, \quad b + c = 18.$$

Ebben az esetben tehát b és c a következő másodfokú egyenlet két gyökeként határozható meg:

$$x^2 - 18x + 80 = 0.$$

Ebből a két oldal hossza 8 és 10 cm.

Ha $t = \frac{40}{3}$, akkor (1) és (2) szerint:

$$bc = \frac{400}{9} \text{ és } b + c = \frac{22}{3} = \frac{66}{9}.$$

b és c a következő másodfokú egyenletnek tesznek eleget:

$$9y^2 - 66y + 400 = 0.$$

Ekkor az egyenlet diszkriminánsa $66^2 - 4 \cdot 9 \cdot 400 = 4356 - 14\,400 < 0$, tehát valós gyök nincs.

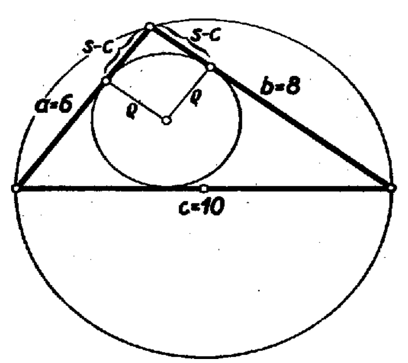
Feladatunk egyetlen megoldása tehát $t = 24\ \mathrm{cm}^2$, s a meg nem adott két oldal 8 és 10 cm.

Megjegyzés: Észrevehető, hogy a háromszög három oldalára kapott értékek: 6, 8, 10 pythagorasi számhármast adnak, háromszögünk tehát Pythagoras tételének megfordítása alapján derékszögű.

Madarász Klára (Szeged, Tömörkény Ig. II. o. t.)

II. megoldás: A szóbanforgó háromszög derékszögű voltát fogjuk igazolni, s ebből számítjuk ki az oldalait és a területét.

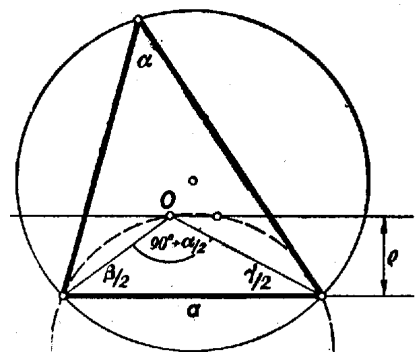
Számítsuk ki az adott 5 cm sugarú körbe rajzolt 6 cm-es befogójú derékszögű háromszögbe írható körnek a sugarát (1. ábra).



1. ábra

A háromszög átfogója $c = 2r = 10$ cm, így Pythagoras-tétellel kiszámítva a másik befogó 8 cm. Derékszögű háromszögben a beírt kör sugara a derékszögű csúcstól a beírt kör érintési pontjáig terjedő szakasz hosszával egyezik, az érintőszakaszok hossza pedig (mint ismeretes) kifejezhető a félkerület s az oldalak különbségével. A jelen esetben a beírt kör sugara tehát $s - c = 12 - 10 = 2$ cm-rel egyenlő.

Igazolni fogjuk, hogy a körül írt kör r sugara, a beírt kör ϱ sugara és az a oldal egyértelműen meghatározzák a háromszöget. Az a oldal ugyanis a körülírt körben meghatározza már a háromszög szembenlevő α szögét (2. ábra).



2. ábra

A β és γ szögek szögfelezőinek metszéspontjaként adódó, beírt kör O középpontjánál levő szög nagysága $180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180° - 90° + \frac{\alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$, így α ismeretében megszerkeszthető az a oldal fölé az a $90° \frac{\alpha}{2}$ látószögű kör, amelyen az O pont rajta van. Az O pont távolsága az oldaltól a megadott ϱ, így az a oldaltól ϱ távolságra haladó párhuzamos metszi ki O-t a megrajzolt látószögkörből. Az O pont ismeretében a szögfelezők megrajzolhatóak, s a szögek kétszeresével a háromszög-oldalak is.

Mivel a párhuzamos két pontban is metszheti a látószög-kört, ezért két háromszöget is kaphatunk. A kettő azonban az a oldal felezőmerőlegesére szimmetrikus, tehát egybevágó. Így valóban bizonyítottuk, hogy egy oldal, a beírt és körülírt kör sugara valóban egyetlen háromszöget határoznak meg.

Láttuk, hogy $r = 5$ cm esetén a 6, 8, 10 cm oldalú háromszögnél lesz a ϱ értéke 2, ezzel tehát igazoltuk a szóbanforgó háromszög derékszögű voltát.

Az oldalakat már kiszámítottuk. A terület a befogók szorzatának fele: 24 cm^2.

Börzsöny László (Bp. V., Eötvös g. I. o. t.)

Megjegyzések: 1. Látható, hogy az I. megoldásban követett gondolatmenettel a feladat akkor is megoldható, ha más számértékeket adunk meg. 2. A feladatunk egy szögfüggvényekkel (de szintén függvénytábla nélküli) történő megoldását (más számadatokkal ugyan) lásd a „Matematikai szakköri feladatgyűjtemény” c. szakköri füzetben: 218. o. 587. feladat.