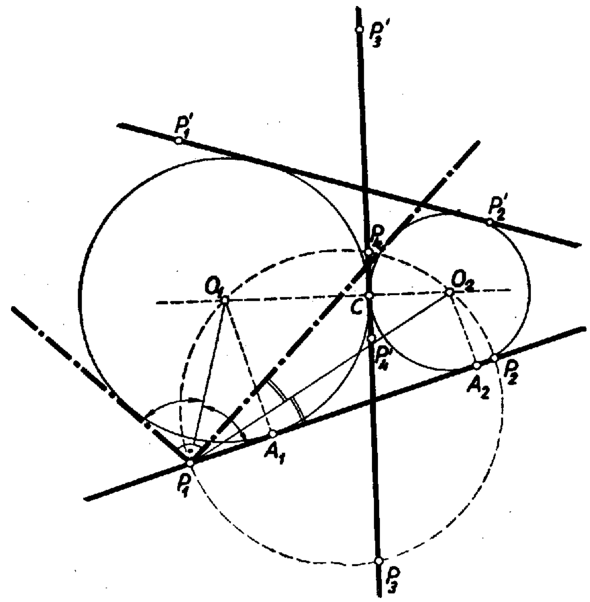
Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor a két kör kívülről érintkezik. Képzeljük megoldottnak a feladatot (lásd az ábrát).



Legyen P_1 az egyik közös érintőnek egy olyan pontja, amelyből a körökhöz egy-egy egymásra merőleges érintő húzható. A merőleges érintők egymással bezárt szögét megkaphatjuk, ha a P_1 pontból az egyik körhöz húzható érintők szögéből levonjuk a másik körhöz húzható érintők szögét. A P_1O_1 egyenes viszont megfelezi a P_1-ből az O_1 közepű kőrhöz húzható érintők szögét, ugyanúgy a P_1O_2 az O_2 közepű körhöz húzható érintők szögét. Ábránkon tehát $2O_1P_1A_1 - 2O_2P_1A_1 = 90^\circ$ (A_1 a közös érintő érintési pontja az O_1 közepű körön).

Az O_1O_2 szakasz látószögét P_1-ből megkapjuk, ha az egyik szögfelező és a közös érintő alkotta szögből levonjuk a másik szögfelező és a közös érintő egymással bezárt szögét, az O_1O_2 szakasz látószöge tehát ábránkon $O_1P_1A_1\sphericalangle - O_2P_1A_1\sphericalangle$. A látószög eszerint fele annak a szögnek, melyet a P_1-ből a két körhöz húzott, közös érintőtől különböző érintők alkotnak, tehát 45° nagyságú.

A P pont megszerkesztése eszerint úgy történhet, hogy megrajzoljuk az O_1O_2 szakasz fölé a 45°-os látószögkört s ennek metszéspontja a közös érintővel P_1. A szerkesztés helyessége a fenti számítás megfordításával könnyen igazolható.

A 45°-os látószögkör a közös külső, érintőt metszi még egy P_2 pontban, a belső érintőt P_2-ban, sőt a 135°-os látószögű kiegészítő ív egy P_4 pontban is. A fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy a P_2-ből, P_3-ból és a P_4-ből húzott érintők is kétszer akkora szöget zárnak be, mint amekkora szögben ezekből a pontokból az O_1O_2 szakasz látszik, tehát ezek az érintőpárok is merőlegesek. – Ha az ábrát tükrözzük az O_1O_2 centrálisra, szintén megfelelő pontokat kapunk az eddigiekkel szimmetrikusan a másik külső érintőn és a belsőn.

Az O_1O_2 fölé rajzolt 45°-os látószögkör mindig metszi a külső érintőt. Legyen ugyanis az O_1 középpontú kör a nagyobb sugarú, ha a sugarak különbözők, így tehát $O_1A_1 \geq O_2A_2$ (A_1 és A_2 a közös külső érintő érintési pontjai). Ekkor $CO_1A_1\sphericalangle \leq 90^\circ$, a CO_1A_1 egyenlőszárú háromszög másik két szögére legalább 90° jut, s igy $O_1A_1O_2\sphericalangle > O_1A_1C\sphericalangle \geq 45^\circ$. – Feladatunknak tehát mindig van 8 megoldása.

– Ha a két kör belülről érintkezik, ugyanúgy igazolható, hogy a feladatnak megfelelő P pontból az O_1O_2 szakasz 45° alatt látszik. Így a szerkesztés egyezik az előbbivel. Itt csak egy külső érintő van, ezért ha a látószögkör metszi az érintőt, 4 megoldás, ha érinti, 2 megoldás lehetséges; ha nincs közös pontjuk, nincs megoldása a feladatnak.

Megjegyzés: Az itt alkalmazott gondolatmenettel ugyanígy elvégezhető a feladat megoldása; ha az érintők nem 90°-ot, hanem tetszőleges α szöget zárnak be egymással. Az O_1O_2 szakasz fölé rajzolt $\frac{\alpha}{2}$ látószögű kör metszi ki a közös érintőkből a feladatnak megfelelő pontokat.

Tatai Péter (Bp. XIV., I. István g. II. o. t.)