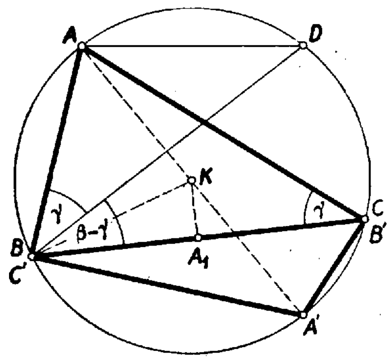
I. megoldás: Az 1. ábrán megrajzoltuk a megszerkesztettnek képzelt ABC háromszöget s a köré írható kört.



1. ábra

Húzzuk meg A-ból a kör másik AB hosszúságú húrját, AD-t is. Egyenlő ívekhez egyenlő kerületi szögek tartoznak, tehát az ABD szög is γ, így a $DBC\sphericalangle = \beta - \gamma (= \delta)$.

Ebből leolvasható a szerkesztés menete. A körülírt kör sugarából és az adott KA_1 szakaszból megszerkesztjük a KA_1B derékszögű háromszöget, a körülírt kör és a BA_1 meghosszabbításának a körrel való metszéspontjaként a C pontot. A körön a D pontot megszerkeszthetjük, ha B mellé felmérjük δ-t. Végül a BD ív megfelezésével megkapjuk a megszerkesztendő háromszög harmadik csúcsát is.

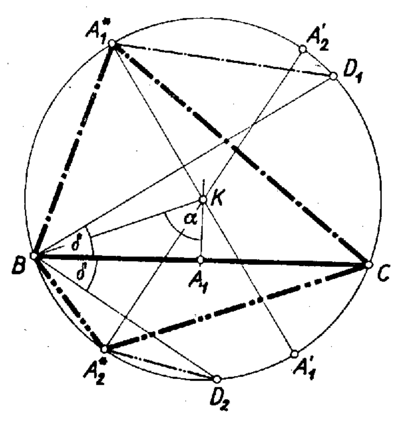
Az így kapott háromszög valóban megoldása a feladatnak, hiszen körülírt köre és a kör középpontjának távolsága az a oldal felezőpontjától a feladatban megadott nagyságúak. A kerületi szögek tétele s a BD körív megfelezése következtében $ABD\sphericalangle$ a háromszög γ szögével egyenlő, tehát a háromszög β és γ szögének különbsége szintén az adott nagyságú δ.

A feladat megoldhatóságához szükséges az, hogy 1) $KA_1 < r$, 2) a megadott $\beta - \gamma = \delta$ szög nem lehet nagyobb, mint a BC oldalnak a B-ben húzott körérintővel alkotott nagyobbik szöge: α_1, hiszen ellenkező esetben a δ szög szára nem metszi a kört.

Vizsgáljuk meg a lehetséges megoldások számát. Ha a körérintő és a BC oldal egymással bezárt kisebbik szögét α_2-vel jelölve $\alpha_2 = \delta$, akkor megoldásunkban a δ-t csak egyirányban mérhetjük fel, a BD ívhez tartozó két felezőpont közül egyike a C ponttal összeesik, tehát egy megoldás van, és a keresett háromszög derékszögű.

Ha $a_2 < \delta < \alpha_1$, akkor a δ-t szintén csak egyirányban mérhetjük fel. A BD húrhoz tartozó két ív megfelezésével két pontot kaphatunk, A-t és A'-t. (Az $a_2 = \delta$ eset összehasonlításával látható, hogy a δ szög nagyobbodásával most a D és A közelebb került B-hez, tehát A és A' a BC szakasz egyik oldalán helyezkednek el). Mivel $\beta - \gamma = \delta > 0$, azért B'-t a háromszög nagyobbik szögének, C'-t a háromszög kisebbik szögének csúcsához kell írnunk. – A KA_1 meghosszabbítására tükrös helyzetű két háromszöghöz jutunk, ha az a oldal másik végpontjára mérjük fel δ-t, de az így kapott háromszögek az eddigiekkel egybevágóak. Feladatunknak ezesetben tehát két megoldása van.

Ha $\delta < \alpha_2 < \alpha_1$, akkor a BC szakasz mindkét oldalára felmérhetjük a B csúcsból a δ szöget (2. ábra), és így kapunk egy–egy D_1 és D_2 pontot.



2. ábra

Véve a C-t nem tartalmazó BD_1 és BD_2 ívek A_1^* és A_2^* felező pontjait, továbbá azok A_1 és A_2 átellenes pontjait, négy háromszöget kapunk, azonban azok páronként egybevágók. Mivel ugyanis

$$\widehat{BA_1^*} = \widehat{A_1^*D_1}, \qquad \widehat{D_1C} = \widehat{CD_2}, \qquad \widehat{D_2A_2^*} = \widehat{A_2^*B},$$

így egyet–egyet véve a három körívből, ezek együtt félkört adnak. Félkört ad azonban szerkesztés szerint az $\widehat{A_2^*D_2}$, $\widehat{D_2C}$ és $\widehat{CA_2'}$ összege is, így $CA_2' = BA_1^*$ és hasonlóan $CA_1' = BA_2^*$. Így A_1^* és A_2', továbbá A_2^* és A_1' egymás tükörképei BC felezőmerőlegesére, amint állítottuk.

Megjegyzés: A körérintő és az a oldal α_2 szöge nem más, mint a megszerkesztett ABC háromszög A-nál levő szöge, hiszen egyenlő íveken nyugvó kerületi szögek egyenlőek.

Kovács Margit (Szombathely, Savaria g. I. o. t.)

II. megoldás: A háromszög könnyen szerkeszthető BC oldala mint húr meghatározza a keresett háromszög harmadik csúcsánál levő szögét. Legyen α a BC húrhoz tartozó hegyesszög, akkor vagy $\beta+\gamma = 180^\circ - \alpha$, vagy $\beta+\gamma=\alpha$. Fölhasználva azt, hogy $\beta-\gamma=\delta$ adott nagyságú, a két egyenletből pl. a γ kiszámítható. Első esetben

$$\gamma = \frac{180^\circ - a - \delta}{2},$$

második esetben:

$$\gamma = \frac{a-\delta}{2},$$

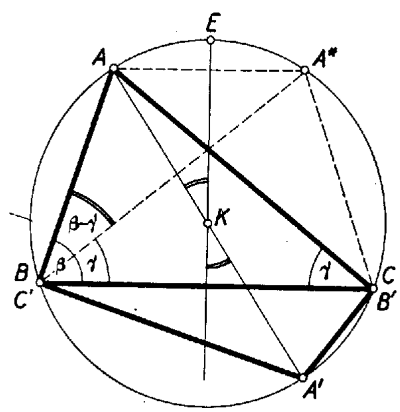
γ-t tehát meg tudjuk szerkeszteni, s abból a háromszöget is.

Látható, hogy általában két megoldást kapunk. Van megoldása a feladatnak, ha $\dfrac{\alpha-\delta}{2} > 0$ vagy $\dfrac{180^\circ-\alpha-\delta}{2} > 0$, azaz $\delta < \alpha$, ill. $\delta < 180^\circ - \alpha$.

Ez az I. megoldás végén tett megjegyzésünk alapján egyezik az ott kapott megoldhatósági feltétellel.

Goldperger István (Balassagyarmat, Balassa g. II. o. t.)

III. megoldás: Képzeljük megszerkesztettnek az ABC háromszöget. Ha a BC oldal felezőmerőlegesére tükrözzük háromszögünket (3. ábra), az így létrejövő $ABA^*\sphericalangle = \beta-\gamma$ nagyságú lesz.



3. ábra

Ez viszont, mint kerületi szög, akkora, mint az azonos íven nyugvó középponti szög fele, tehát $AKE\sphericalangle$ szintén az adott $\beta-\gamma=\delta$ nagyságú.

A szerkesztés ennélfogva úgy történik, hogy a BC oldal és a körülírt kör megszerkesztése után K-nál a BC oldal felezőmerőlegesére felmérjük δ-t, s a szög szára kimetszi a körből a háromszög harmadik csúcsát.

Látható, hogy δ-t általában négyféleképp mérhetjük fel, de csak két lényegében különböző megoldás van. Az okoskodás visszafelé ismétlésével könnyen bizonyítható, hogy a kapott két háromszög valóban megfelel a követelményeknek.

A diszkusszió ugyanúgy végezhető, mint az I. megoldásban

Bartha László (Balassagyarmat, Balassa g. II. o. t.)