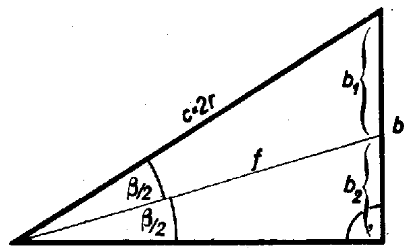
I. megoldás: A háromszög oldalai legyenek a, b, $c=2r$, a szögfelező által létesített két szakasz b_1, b_2. A létrejött két derékszögű háromszögből (1. ábra)

$$a^2+b^2=c^2$$

és

$$a^2+b_2^2=f^2$$



1. ábra

A szögfelező osztásarányából

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{a}{c},$$

viszont

$$b_1+b_2=b,$$

a kettőből

$$b_2=\frac{ab}{a+c}.$$

Ezt a második Pythagoras-tételbe írva s az elsőt is fölhasználva

$$a^2+\frac{a^2b^2}{(a+c)^2}=a^2\frac{(a+c)^2+(c^2-a^2)}{(a+c)^2}=\frac{2a^2c}{a+c}=f^2,$$

ebből:

$$2ca^2-f^2a-f^2c=0.$$

Mivel a távolság, ezért a pozitív gyök lesz a megoldás:

$$a=\frac{f^2+\sqrt{f^4+8f^2c^2}}{4c}=\frac{f}{4c}(f+\sqrt{f^2+8c^2}),$$

másképpen

$$a:f=(f+\sqrt{f^2+8c^2}):4c.$$

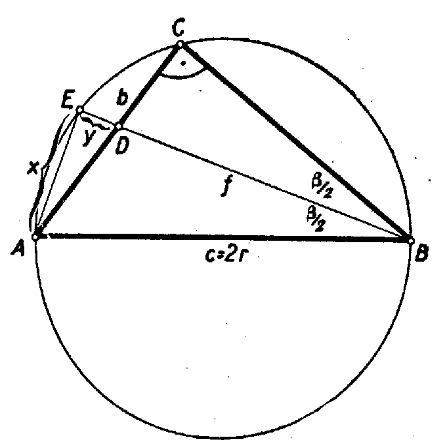
Ebből a-t a következőképp szerkeszthetjük meg. Először megszerkesztjük a $\sqrt{8}c$ távolságot, majd f és $\sqrt{8}c$ befogójú derékszögű háromszögből átfogóként a $\sqrt{f^2+8c^2}$ távolságot, s ezt f-fel növeljük. Az így kapott szakaszból, valamint f-ből és $4c$-ből negyedik arányos szerkesztéssel megkapjuk a-t.

a és c ismeretében a derékszögű háromszög már megszerkeszthető.

A megoldhatóság feltétele az, hogy $f<c$. Ha ez teljesül, mindig van 1 megoldása a feladatnak.

Hornyánszky Tamás (Bp. VIII., Piarista g. I. o. t.)

II. megoldás: A megszerkesztendő ABC háromszög f szögfelezőjét hosszabbítsuk meg a köréjeírt körig (2. ábra).



2. ábra

Mivel $AED\triangle$ A-nál levő szöge az EC íven nyugszik, így $\frac{\beta}{2}$ nagyságú, s ennek következtében $AED\triangle \sim BEA\triangle$. Ebből

$$y : x = x : (f + y),$$

azaz

$$x^2 = y^2 + fy. \tag{1}$$

Viszont a BEA derékszögű háromszögben

$$c^2 = x^2 + (y + f)^2 = x^2 + y^2 + 2fy + f^2,$$

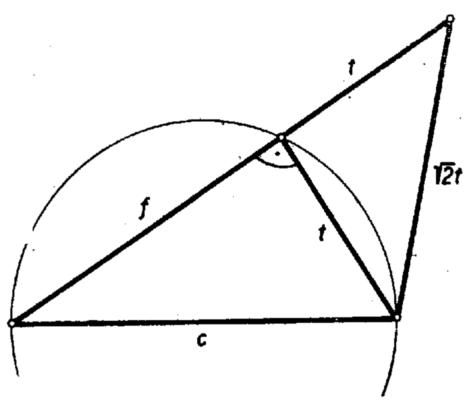
tehát (1) fölhasználásával

$$c^2 = 2y^2 + 3fy + f^2,$$
$$c^2 - f^2 = y(3f + 2y).$$

Ha $c^2 - f^2$-et t^2-tel jelöljük, 2-vel szorozva a következő egyenlőséget kapjuk:

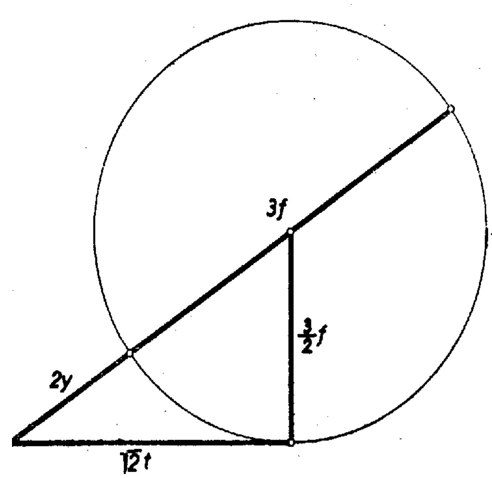
$$2t^2 = 2y(3f + 2y) \tag{2}$$

Ennek alapján y-t a következőképpen szerkeszthetjük meg. A c és f oldalú derékszögű háromszög befogójaként megszerkesztjük t-t (3. ábra).



3. ábra

A (2) egyenlőség szerint $\sqrt{2}t$ mértani közép $2y$ és $(3f + 2y)$ közt. Megszerkesztjük először $\sqrt{2}t$-t, majd ebből a 4. ábrán látható módon az érintő és szelődarabok közti mértani középösszefüggés alapján megszerkesztjük $2y$-t.



4. ábra

y ismeretében már könnyen megszerkeszthető a 2. ábra AEB háromszöge s ebből a keresett $ABC\triangle$ is.