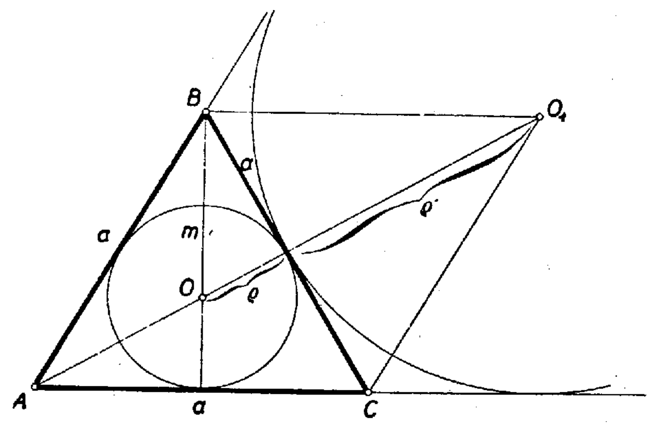
I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



Egyenlő oldalú háromszögben a szögfelezők, a súlyvonalak és a magasságvonalak egybeesnek, és így $\varrho=\frac{m}{3}$.

Mivel a külső szögfelezők a belsőkre merőlegesek, és így a szemközti oldalakkal párhuzamosak, azért ABO_1C paralelogramma, vagyis $\varrho'=m$. Tehát

$$\varrho'(\varrho+\varrho')=m\left(\frac{m}{3}+m\right)=\frac{4m^2}{3}=\frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2=\frac{4}{3}\cdot\frac{3a^2}{4}=a^2,$$

ami bizonyítandó volt.

Halász Gábor (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

II. megoldás: Mivel az ABO_1C paralelogrammának két szomszédos oldala $AB=AC=a$, azért a paralelogramma rombusz, és így $BO_1=a$, és az átlók egymásra merőlegesek. A külső és belső szögfelezők merőlegesek egymásra, tehát az $OBO_{1\triangle}$ derékszögű. Ismert tétel szerint a $BO_1=a$ befogó mértani középarányos az egész átfogó ($OO_1=\varrho+\varrho'$) és a befogónak az átfogón levő merőleges vetülete (ϱ') között, vagyis

$$a^2=(\varrho+\varrho')\varrho',$$

ami bizonyítandó volt.

Hornyánszky Tamás (Bp. VIII.; Piarista g. I. o. t.)