A legegyszerűbb olyan egyenlet, amelynek gyöke $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$x-(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0,$$

de ennek együtthatói természetesen nem mind egész számok.

Vigyük az általános tagot a jobb oldalra, és emeljük mindkét oldalt négyzetre:

$$x^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}.$$

Az együtthatók még mindig nem megfelelők, de

$$x^2-5=2\sqrt{6}$$

alakba írva, és mindkét oldalt négyzetre emelve

$$x^4-10x^2+25=24,$$

vagyis

$$x^4-10x^2+1=0 \tag{1}$$

egyenletben az együtthatók egész számok, és $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ kielégíti az egyenletünket.

Megmutatjuk, hogy negyedfokúnál alacsonyabb fokú egyenlet nem tehet eleget feltételeinknek.

Elsőfokú egyenlet nem jöhet számításba, mert egész együtthatós elsőfokú egyenlet gyöke mindig racionális.

$$ax^2+bx+c=0$$

másodfokú egyenlet esetén behelyettesítéskor $\sqrt{6}$ *csak* az x^2-ben szerepel, és mivel $a\neq 0$, azért nem létezhetik olyan másodfokú egyenlet, melynek $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ gyöke volna.

A harmadfokú egyenlet általános alakja

$$ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Mivel $x^3=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3=2\sqrt{2}+6\sqrt{3}+9\sqrt{2}+3\sqrt{3}=11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$, azért $\sqrt{6}$ ismét *csak* a másodfokú tagban szerepel, tehát szükségképpen $b=0$. De akkor

$$\begin{gathered}11\sqrt{2a}+9\sqrt{3a}+\sqrt{2c}+\sqrt{3c}+d=\\=\sqrt{2}(11a+c)+\sqrt{3}(9a+c)+d=0,\end{gathered}$$

ami csak úgy állhat fenn, ha $a=c=d=0$.

Tehát az (1) alatti negyedfokú egyenlet a legalacsonyabb fokú, amely feltételeinknek eleget tesz.

Raisz Klára (Miskolc, Zrínyi I. lg. I. o. t.)