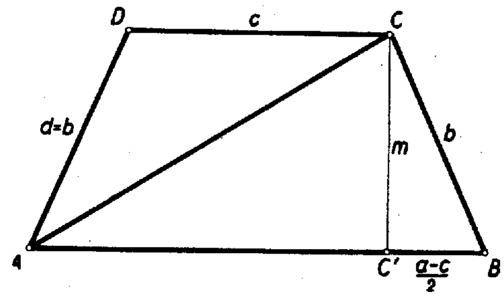
A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Állításunk igazolást nyert, ha megmutatjuk, hogy

$$e^2 = b^2 + (\sqrt{ac})^2 = b^2 + ac,$$

mert ismeretes, hogy Pythagoras tétele megfordítható: minden háromszög derékszögű, amelynek oldalai kielégítik a pythagorasi egyenletet.

$$AC' = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2},$$

és így

(1) $$e^2 = AC'^2 + m^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + m^2,$$

(2) $$b^2 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + m^2.$$

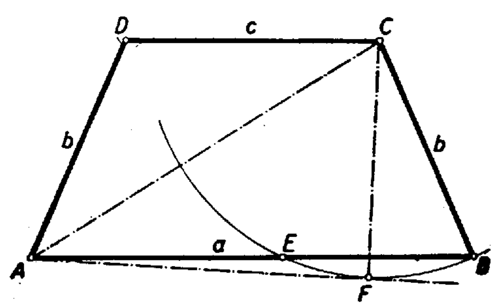
(1) és (2) különbsége

$$e^2 - b^2 = \frac{a^2+2ac+c^2}{4} - \frac{a^2-2ac+c^2}{4} = ac,$$

ami bizonyítandó volt.

Bender Cecília (Bp. I., Szilágyi E. lg. II. o. t.)

II. megoldás: Rajzoljunk az egyik tompaszögű csúcs körül a szárral mint sugárral kört (a betűzést a 2. ábra mutatja).



2. ábra

A hosszabb párhuzamos oldalon keletkező E metszéspontra $CE \parallel AD$, mert a BEC egyenlő szárú háromszögből és a trapéz egyenlő szárú voltából

$$CEB\sphericalangle = CBE\sphericalangle = DAC\sphericalangle.$$

Így $AE = DC = c$.

Ha a körhöz A-ból érintőt húzunk, akkor a keletkező ACF derékszögű háromszög két oldala az átlóval és a szárral egyenlő hosszúságú, az AF oldalra pedig az érintő mértani közép tulajdonsága szerint

$$AF = \sqrt{AB \cdot AE} = \sqrt{ac}.$$

Ezzel igazoltuk az állítást, mivel három oldalból csak egyféle háromszög szerkeszthető.

Megjegyzés: A feladat állítása közvetlenül adódik Ptolemaios tételéből is. Mivel ugyanis minden egyenlő szárú trapéz húrnégyszög, a tétel szerint

$$e^2 = b^2 + ac,$$

és ezt elegendő igazolni.

Kolonits Ferenc (Bp. VIII., Piarista g. II. o. t.)