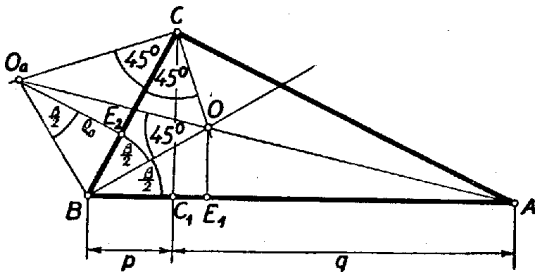
I. megoldás: Jelöljük az O középpontú beírt kör érintési pontját az AB átfogón E_1-gyel, a $BC = a$ oldalhoz írt O_a középpontú, ϱ_a sugarú kör érintési pontját az a befogón E_2-vel (1. ábra).



1. ábra

Mivel a feltétel szerint $a < b$, azért az átfogóhoz tartozó CC_1 magasság a BC oldallal 45°-nál kisebb szöget zár be, vagyis $BC_1 = p < BE_1$.

Be fogjuk bizonyítani, hogy $BE_1 = \varrho_a$.

A belső és külső szögfelezők egymásra merőlegesek, azért a $BOCO_a$ négyszög húrnégyszög, és így a kerületi szögek tétele szerint a $BOO_a\sphericalangle = BCO_a\sphericalangle = 45°$. Tehát az OBO_a derékszögű háromszög egyenlő szárú, vagyis $BO = BO_a$.

Mivel a $BO_aE_2\sphericalangle$ mint merőleges szárú szög egyenlő $\dfrac{\beta}{2}$-vel, azért a

$$BOE_{1\triangle} \cong BO_aE_{2\triangle}$$

amiből következik, hogy

$$BE_1 = O_aE_2 = \varrho_a,$$

és így, mint láttuk

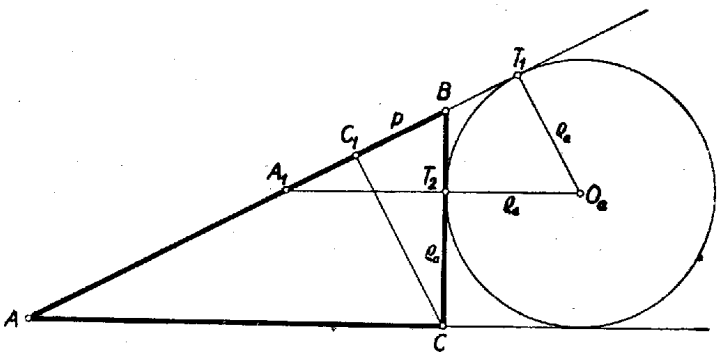
$$p = BC_1 < BE_1 = \varrho_a.$$

Hasonlóképpen

$$\varrho_b = AE_1 < AC_1 = q$$

Hornyánszky Tamás (Bp., VIII., Piarista g. I. o. t.)

II. megoldás: A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

(1) $$ABC_\triangle \sim A_1BT_{2\triangle} \sim A_1O_aT_{1\triangle} \sim CBC_{1\triangle}.$$

Továbbá

$$A_1O_a = A_1T_2 + \varrho_a,$$
$$BC = BT_2 + \varrho_a.$$

Mivel a feltétel szerint $a < b$, azért $BT_2 < A_1T_2$, tehát $BC < A_1O_2$, és így (1) utolsó hasonlósága alapján

$$BC_1 = p < O_aT_1 = \varrho_a.$$

Ugyanúgy $b > a$ miatt, b-nek q vetületére nézve

$$q > \varrho_b.$$

Tatai Péter (Bp., XIV., I. István g. II. o. t.)