I. megoldás: Egyenlőtlenségünk bizonyítására felhasználjuk két szám számtani és mértani közepe közötti összefüggést:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Jelen feladatban tehát

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca},$$

ahol egyenlőség csak akkor lehet, ha $a=b=c$.

Innen (mivel a feltétel szerint mindhárom egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív)

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab \cdot bc \cdot ca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

Dér Aladár (Szombathely, Nagy Lajos g. II. o. t.)

II. megoldás: A bal oldalt polinommá alakítva

(1) $$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 \geq 6abc.$$

Osszuk mindkét oldalt a pozitív abc-vel, és rendezzük át a tagokat.

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geq 6.$$

Ismeretes, hogy bármely valós számhoz hozzáadva a reciprok értékét, a nyert összeg nagyobb vagy egyenlő, mint 2:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2.$$

Ezt egyenlőtlenségünkre alkalmazva, azonnal adódik helyessége. Egyenlőség nyilván csak $a=b=c$ esetén áll fenn.

Komlóssy György (Szolnok, Verseghy g. I. o. t.)

III. megoldás: Az (1) egyenlőtlenséget 0-ra redukálva, és a „$-6abc$" tagot három egyenlő rész összegére bontva:

$$(a^2c - 2abc + b^2c) + (ab^2 - 2abc + ac^2) + (bc^2 - 2abc + a^2b) \geq 0,$$

azaz

$$c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 \geq 0.$$

Ez pedig igaz, mert bármely valós szám négyzete pozitív, és a feltétel szerint a, b, $c > 0$. Az egyenlőség jele nyilván csak $a=b=c$ esetén érvényes.

Náray Miklós (Bp., VIII., Széchenyi g. II. o. t.)