I. megoldás: Alakítsuk át kifejezésünket szorzattá:

$N = n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n = n(n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36)$.

A zárójelben álló első 3 tag $(n^3 - 7n)^2$, és így

$N = n\left[(n^3 - 7n)^2 - 36)\right] = n(n^3 - 7n + 6)(n^3 - 7n - 6) =$
$= \left[n(n^2 - 1) - 6(n - 1)\right]\left[n(n^2 - 4) - 3(n + 2)\right]$

Az első szögletes zárójelből $(n - 1)$-et, a másodikból $(n + 2)$-t kiemelve

$N - n(n - 1)(n + 2)(n^2 + n - 6)(n^2 - 2n - 3) =$
$= n(n - 1)(n + 2)(n - 2)(n + 3)(n - 3)(n + 1)$.

A tényezőket nagyságrendben írva

$N = (n - 3)(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$,

vagyis N hét egymás után következő szám szorzata.

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Mivel hét egymásután következő szám közül legalább 3 páros, legalább 2 osztható 3-mal, és legalább egy–egy osztható 5-, ill. 7-tel, azért N osztható $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$-szal, ha n természetes szám ($n = 1$, 2, 3 esetén $N = 0$).

Megjegyzés: Mivel három egymás után következő páros szám közül legalább az egyik osztható 4-gyel, azért N osztható $2 \cdot 2520 = 5040$-nel.

Goldperger István (Balassagyármat, Balassa g. II. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük polinomunkat $P(n)$-nel.

$P(n) = n(n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36) = nP_1(n)$.

Keressük meg a

$P_1(n) = n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36 = 0$ egyenlet gyökeit.

Mivel az ismeretlen csak páros kitevőjű hatványon szerepel, azért ha x gyök, akkor $-x$ is az.

Ismert tétel szerint egyenletünk egész gyökei csak 36 osztói közül kerülhetnek ki. Vegyük észre, hogy $n = 1$ kielégíti egyenletünket, azért a fentiek szerint $(n - 1)$ és $(n + 1)$ két gyöktényező. $P_1(n)$-et osztva $(n^2 - 1)$-gyel, nyerjük, hogy

$P(n) = n(n^2 - 1)P_2(n) = n(n^2 - 1)(n^4 - 13n^2 + 36)$.

A

$$P_2(n) = n^4 - 13n^2 + 36 = 0$$

egyenletből

$$n^2 = 4, \quad \text{ill.} \quad 9,$$

tehát

$P_2(n) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) = (n + 2)(n - 2)(n + 3)(n - 3)$, és így

$P(n) = (n - 3)(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

Innen kezdve a megoldás egyezik az első megoldással.

Bartók Mária (Bp., II., Hámán Kató lg. II. o. t.)