I. megoldás: Legyenek a derékszögű háromszög oldalai $a < b < c$, súlyvonalai s_a, s_b, s_c.
Pythagoras tétele szerint

$$s_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \qquad s_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \qquad s_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Ebből kitűnik, hogy $a < b < c$ esetén $s_a > s_b > s_c$.

Ha a súlyvonalakból szerkesztett háromszög derékszögű, akkor erre is érvényes Pythagoras tétele:

$$s_a^2 = s_b^2 + s_c^2,$$

vagyis

$$b^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{4},$$

ahonnan

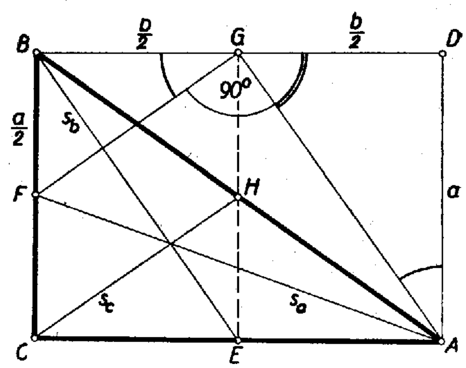
$$b^2 = 2a^2, \quad \text{azaz} \quad b = a\sqrt{2}.$$

Mivel okoskodásunk fordított sorrendben is elvégezhető, azért e szükséges feltétel elégséges is.

Tehát egy derékszögű háromszög súlyvonalaiból, mint oldalakból, szerkesztett háromszög, akkor és csak akkor derékszögű, ha az eredeti derékszögű háromszög befogóinak aránya: $1 : \sqrt{2}$.

Gavajda Pál (Bp. I. Petőfi g. I. o. t.)

II. megoldás: Egészítsük ki az ACB derékszögű háromszöget $ACBD$ téglalappá, és jelöljük az AC, CB, BD és BA szakaszok felezőpontjait rendre E, F, G, H-val (lásd az ábrát).



Mivel nyilvánvalóan $FG = CH = s_c$, $GA = BE = s_b$ és $AF = s_a$, azért az $AFG_\triangle$ oldalai az $ABC_\triangle$ súlyvonalai.

E háromszögnek s_a-val szembenfekvő G csúcspontú szöge akkor és csak akkor derékszög, ha

$$BGF_\triangle \sim DAG_\triangle,$$

ugyanis ekkor az egy ívvel jelölt szögek kiegészítik a két ívvel jelölt szöget derékszöggé.

Tehát ez esetben a befogók aránya

$$\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = \frac{b}{2} : a,$$

ahonnan

$$b = a\sqrt{2}.$$

Tusnády Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth g. II. o. t.)