Megmutatjuk, hogy ha x értékét behelyettesítjük a (2) egyenlet bal oldalába, akkor eredményül $(a-b)$-et, azaz a jobb oldalt kapjuk.

A számítás egyszerűbb, ha az x-et és a (2) bal oldalát előbb egyszerűbb alakra hozzuk.

Legyen $\sqrt{\frac{a}{b}} = a(>1)$, tehát

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right). \tag{1'}$$

A (2) bal oldalán gyöktelenítsük a nevezőt, vagyis bővítsük a törtet $(x+\sqrt{x^2-1})$-gyel. Mivel $(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1}) = x^2-(x^2-1) = 1$, azért (2) bal oldala

$$2b(\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1}). \tag{2'}$$

Számítsuk ki először a négyzetgyök alatti x^2-1 értékét:

$$x^2-1 = \frac{1}{4}\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2\right)-1 = \frac{a^2+\frac{1}{a^2}-2}{4} = \left(\frac{a-\frac{1}{a}}{2}\right)^2,$$

azaz

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right) \qquad (a>1 \text{ miatt}). \tag{3}$$

(1') és (3)-ból

$$x+\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right) = a \tag{4}$$

(3) és (4) alapján a (2) egyenlet bal oldala

$$2b\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)a = b(a^2-1) = b\left(\frac{a}{b}-1\right) = a-b, \tag{2'}$$

ami bizonyítandó volt.

Somkuti Piroska (Bp. I. Szilágyi E. lg. II. o.t.)

Megjegyzés: Könnyen meggyőződhetünk, hogy állításunk igaz $b<a<0$, vagy $a=b\neq 0$ esetén is.