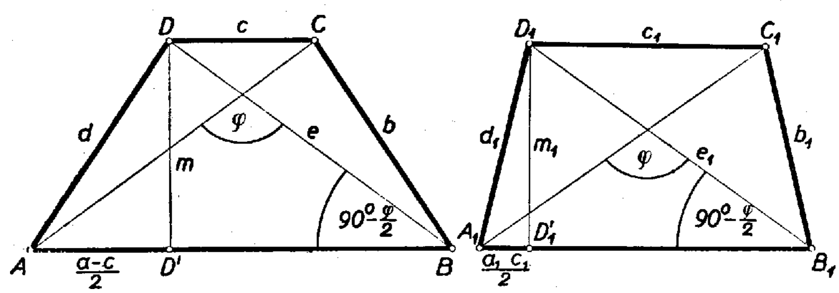
I. megoldás: Tekintsünk két tetszés szerinti, a feltételeknek megfelelő, egyenlő szárú trapézt. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Meghúzva a trapézekben a $DD' = m$, illetőleg $D_1D_1' = m_1$, magasságokat,

(1) $$BD'D\triangle \simeq B_1D_1'D_1\triangle,$$

mert átfogójuk a feltétel szerint egyenlő és a B, ill. B_1 csúcsnál fekvő hegyes szögeik $90 - \dfrac{\varphi}{2}$, ha φ-vel jelöljük az átlók állandó szögét.

(1)-ből következik, hogy

$$m = m_1.$$

Másrészt

$$BD' = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}, \qquad B_1D_1' = a_1 - \frac{a_1-c_1}{2} = \frac{a_1+c_1}{2}.$$

De (1) alapján

$$BD' = B_1D_1', \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{a+c}{2} = \frac{a_1+c_1}{2},$$

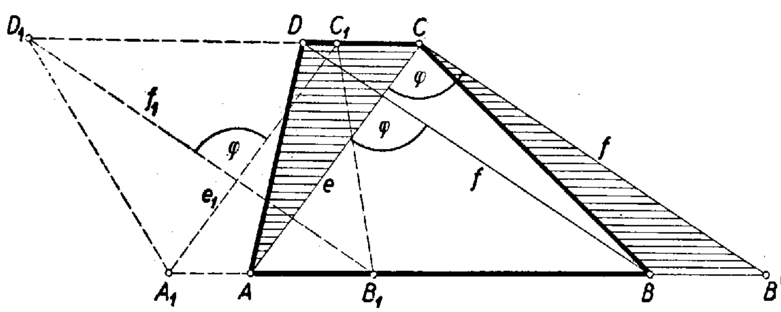
és így

$$\frac{a+c}{2}m = \frac{a_1+c_1}{2}m_1,$$

azaz a két trapéz területe egyenlő.

Bayer Magda (Bp., XX., Bagi lg. II. o. t.)

II. megoldás: Bebizonyítjuk, hogy a tétel igaz nem egyenlő szárú trapézekre is, hacsak az átlók szöge φ egyenlő, és a két (különböző) átló a két trapézben egyenlő: $e = e_1$ és $f = f_1$. Lásd a 2. ábrát, amely a betűzést is mutatja.



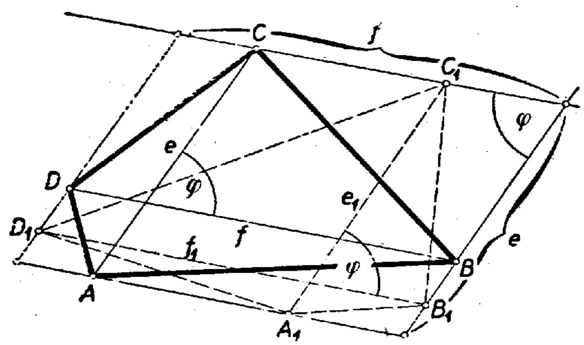
2. ábra

Toljuk el a DB átlót önmagával párhuzamosan a CB' helyzetbe, akkor $BB' = DC$, és így a $DCA\triangle$ területe egyenlő a $BB'C\triangle$ területével, mert a DC és BB' oldalakhoz tartozó magasság mindkét esetben a trapéz magassága. Ebből következik, hogy egy *tetszés szerint* kiválasztott trapéz területe megegyezik az $AB'C\triangle$ területével, amely csak az e és f távolságoktól és az általuk bezárt φ szögtől függ.

Tomka Erzsébet (Bp. II., Hámán Kató lg. II. o. t.)

III. megoldás: Megmutatjuk, hogy a tétel bármilyen konvex négyszögre igaz, ha az átlók hossza (e és f), és az általuk bezárt φ szög egyenlő.

Húzzunk az $ABCD$ konvex négyszög csúcsain át az átlókkal párhuzamos egyeneseket (3. ábra).



3. ábra

Az így nyert paralelogramma oldalai e, illetőleg f, egyik szöge pedig φ, tehát alakja és területe csak e, f és φ-től függ. Az adott konvex négyszög területe pedig e paralelogramma területének a fele.

Madarász Klára (Szeged, Tömörkény lg. II. o. t.)