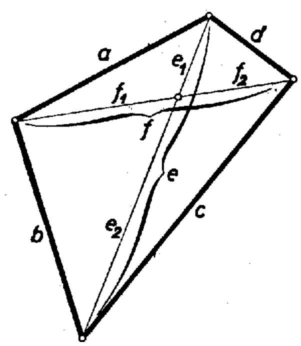
I. megoldás: Jelöljük az oldalakat a, b, c, d-vel, a kerületet k-val, az átlókat e, f betűvel (1. ábra).



1. ábra

Az e átló a négyszöget két háromszögre bontja. Mindegyikre felírjuk a háromszög oldalaira ismert egyenlőtlenséget:

$$e < a + b, \qquad e < c + d.$$

Ezek összegezése adja

$$2e < a + b + c + d = k, \quad \text{vagyis} \quad e < \frac{k}{2}. \tag{1}$$

Hasonló módon az f átló által létesített két háromszögből

$$f < \frac{k}{2}. \tag{2}$$

(1) és (2) összege

$$e + f < k. \tag{I}$$

Tekintsük most azt a négy háromszöget, amelyre a két átló a négyszöget bontja. Ennek a négy háromszögnek oldalai között szerepelnek az átlók részei: e_1 és e_2, illetve f_1 és f_2. Erre a négy háromszögre is írjuk fel a háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőséget.

$$\begin{aligned} e_1 + f_1 &> a, \\ e_2 + f_1 &> b, \\ e_2 + f_2 &> c, \\ e_1 + f_2 &> d, \end{aligned}$$

amelyeknek összegezése adja

$$2(e_1 + e_2) + 2(f_1 + f_2) = 2(e + f) > a + b + c + d = k,$$

vagyis

$$e + f > \frac{k}{2}. \tag{II}$$

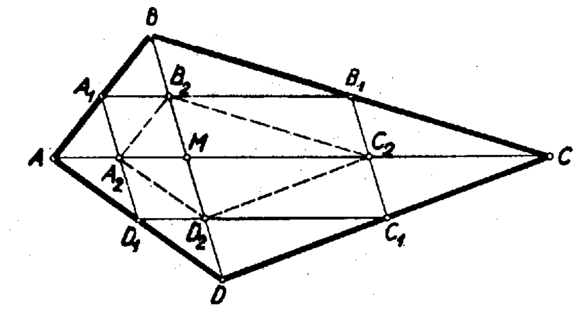
(I) és (II) így is írható

$$\frac{k}{2} < e + f < k,$$

ami bizonyítandó, volt.

Kovács Margit (Szombathely, Savaria g. I. o. t.)

II. megoldás: A k kerületű $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjait rendre összekötve nyerjük az $A_1B_1C_1D_1$ paralelogrammát (2. ábra), amelynek oldalai az AC, ill. BD átlók fele, tehát kerülete az átlók összege: $e + f$.



2. ábra

E paralelogramma oldalai metszik az $ABCD$ négyszög átlóit az A_2, B_2, C_2, D_2 pontokban. Az $A_2B_2C_2D_2$ négyszög nem más, mint az $ABCD$ négyszögnek, az átlók M metszéspontjára, mint hasonlósági centrumra vonatkozó $2:1$ arányú kicsinyítése, és így kerülete $\frac{k}{2}$. Mivel konvex idomba írt konvex idom kerülete mindig kisebb az eredetinél, azért

$$\frac{k}{2} < e + f < k,$$

amit bizonyítani kellett.

Brodszky Ildikó (Bp. VIII., Ságvári lg. II. o. t.)