I. megoldás: A kérdéses három szám szorzata

$$N=(a^3-1)a^3(a^3+1)$$

ahol a 1-nél nagyobb természetes szám.

$504=8\cdot 9\cdot 7$. Mivel 8, 9 és 7 páronként relatív prímek, feladatunkat megoldottuk, ha megmutatjuk, hogy N rendre osztható 8-cal, 9-cel és 7-tel.

a) Ha a páros, akkor a^3 osztható $2^3=8$-cal. Ha a páratlan, akkor (a^3-1) és (a^3+1) két egymást követő páros szám, tehát egyikük osztható 4-gyel, és így szorzatuk osztható 8-cal.

Tehát N mindenképpen osztható 8-cal.

b) Ha $a=3k$ alakú, akkor $a^3=27k^3$ osztható 9-cel. Ha $a=3k\pm 1$ alakú, akkor $a^3=27k^3\pm 27k^2+9k\pm 1$, és így vagy a^3-1, vagy a^3+1 osztható 9-cel.

Tehát N mindenképpen osztható 9-cel.

c) Ha $a=7k$ alakú, akkor a^3 osztható 7-tel.

Ha $a=7k\pm 1$ alakú, akkor $a^3=7^3k^3\pm 3\cdot 7^2k^2+7k\pm 1$, tehát vagy a^3-1 vagy a^3+1 osztható 7-tel.

Ha $a=7k\pm 2$, illetőleg $7k\pm 3$ alakú, akkor hasonlóképpen $a^3=7A\pm 8$, illetőleg $7B\pm 27$ alakú és így vagy a^3+1 vagy pedig a^3-1 mindenkor osztható 7-tel.

Tehát N mindenképpen osztható 7-tel.

Ferentzy Kinga (Bp. IX., Patrona Hungariae lg. I. o. t.)

II. megoldás: Alakítsuk át N-et a következőképpen:

$$\begin{aligned}N&=a^3(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)=\\&=a^2(a-1)a(a+1)\big[(a-3)(a+2)+7\big]\big[(a+3)(a-2)+7\big]=\\&=a^2(a-3)(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)(a+3)+\\&+7a^2(a-1)a(a+1)\big[(a-3)(a+2)+(a+3)(a-2)+7\big]\end{aligned}$$

A két tagot A-val és B-vel jelölve, utóbbi így alakítható tovább:

$$\begin{aligned}B&=7a^2(a-1)a(a+1)(2a^2-5)=7a^2(a-1)a(a+1)\big[2(a^2-4)+3\big]=\\&=2\cdot 7a^2(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+3\cdot 7a^2(a-1)a(a+1)=C+D.\end{aligned}$$

a) A utolsó 7 tényezője egymás után következő 7 szám, ezek közül legalább 3 páros, legalább 2 osztható 3-mal, és 1 osztható 7-tel.

Tehát A osztható $2^3\cdot 3^2\cdot 7$-tel.

b) C utolsó 5 tényezője 5 egymást követő szám. Ezek közül legalább 2 két egymás után következő páros szám, ezek szorzata osztható 8-cal. Ha a nem osztható 3-mal, akkor az 5 tényező közül van két 3-mal osztható szám, ha a osztható 3-mal, akkor a^2 osztható 3^2-tel. Végül C egyik tényezője 7.

Tehát C osztható $2^3\cdot 3^2\cdot 7$-tel.

c) Ha a páros, akkor a^3 osztható 2^3-mal, ha páratlan, akkor $(a-1)(a+1)$ 2 egymást követő páros szám szorzata. Ha a osztható 3-mal, akkor a^2 osztható 3^2-tel, ha a nem osztható 3-mal, akkor vagy $a-1$ vagy $a+1$ osztható 3-mal s így $3(a-1)$ és $3(a+1)$ közül az egyik osztható 3^2-tel. 7 pedig D-nek egyik tényezője,

Tehát D is osztható $2^3\cdot 3^2\cdot 7$-tel.

Így az

$$N=A+B=A+C+D$$

kifejezés is osztható $2^3\cdot 3^2\cdot 7$-tel, és ezt akartuk bizonyítani.

Heinemann Irén (Pécs, Leöwey lg. I. o. t.)