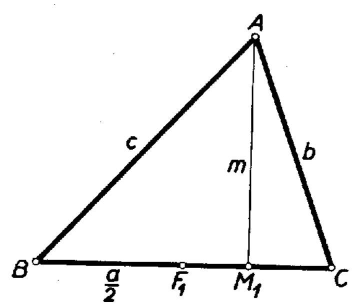
I. megoldás: Legyen az $ABC_\triangle$ hegyesszögű (1. ábra).



1. ábra

Írjuk fel a Pythagoras–tételt az $AM_1B_\triangle$, ill. $AM_1C_\triangle$-ben:

$$c^2=\left(\frac{a}{2}+M_1F_1\right)^2+m^2,$$
$$b^2=\left(\frac{a}{2}-M_1F_1\right)^2+m^2.$$

A második egyenletet kivonva az elsőből

$$c^2-b^2=2a\cdot M_1F_1.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Teljesen hasonló a bizonyítás tompaszögű háromszögre is.

Megjegyzések: 1) Nyilvánvalóan igaz a tétel $b=c$ esetben is, mert akkor $M_1=F_1$.

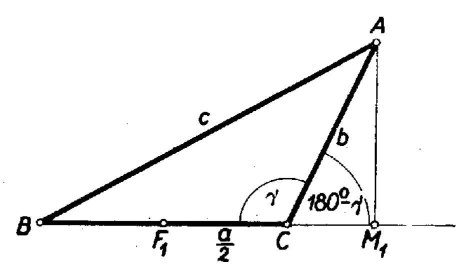
2) $\gamma=90^\circ$ esetén $M_1\equiv C$ vagyis $M_1F_1=CF_1=\dfrac{a}{2}$ és így

$$c^2-b^2=2a\cdot\frac{a}{2}=a^2.$$

Bizonyított tételünk tehát a Pythagoras–tétel egy általánosításának tekinthető általános háromszögre.

Sikabonyi György (Bp. VIII., Kandó híradásip. t. I. o. t.)

II. megoldás: Tekintsünk most tompaszögű háromszöget (2. ábra).



2. ábra

A cosinus–tétel szerint

$$c^2-b^2=a^2-2ab\cos\gamma,$$
$$F_1M_1=\frac{a}{2}+b\cos(180^\circ-\gamma)=\frac{a}{2}-b\cos\gamma.$$

Ebből

$$2a\cdot F_1M_1=a^2-2ab\cos\gamma,$$

tehát

$$c^2-b^2=2a\cdot F_1M_1.$$

A bizonyítás hegyesszögű háromszög esetén ugyanígy elvégezhető.

Stark Gáspár (Bp. VIII., Piarista g. II. o. t.)