I. megoldás: Berkes Jenő „A talpponti háromszögről” c. cikkében (lásd az 1956. márciusi számban) kimutatja, hogy $m_1 = 2r\cos\alpha$, ahol r a háromszög köré írt kör sugara. Ha figyelembe vesszük, hogy

$$r = \frac{abc}{4t},$$

ahol t a háromszög területe, a cosinus-tétel szerint

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

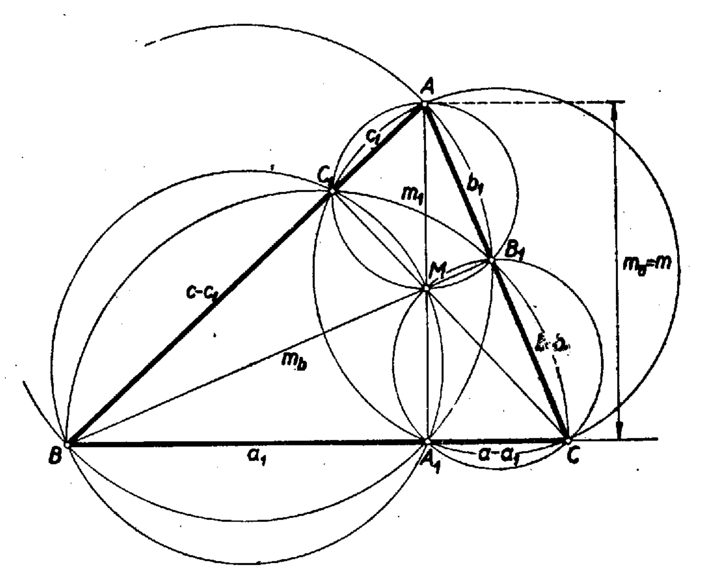
és $m = \dfrac{2t}{a}$ (ahol a az m-hez tartozó oldal), akkor

$$mm_1 = \frac{2t}{a}\cdot\frac{abc}{2t}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Megjegyzés: Ha α tompaszög, akkor vagy m_1-et negatívnak vesszük, vagy a jobboldal abszolút értékét tekintjük.

Kolonits Ferenc (Bp., VIII., Piarista g. I. o. t.)

II. megoldás: Az 1. ábra A-nál hegyesszögű háromszöget, a 2. ábra A-nál tompaszögű háromszöget tüntet fel, mindkettő egyben a betűzést is mutatja.



1. ábra

Mindkét ábrában

$$AB_1M\triangle \sim AA_1C\triangle,$$

mert derékszögű háromszögek, melyekben az A-nál fekvő hegyesszög közös, ill. csúcsszög.

Tehát

$$m_1 : b_1 = b : m,$$

ahonnan

$$mm_1 = bb_1.$$

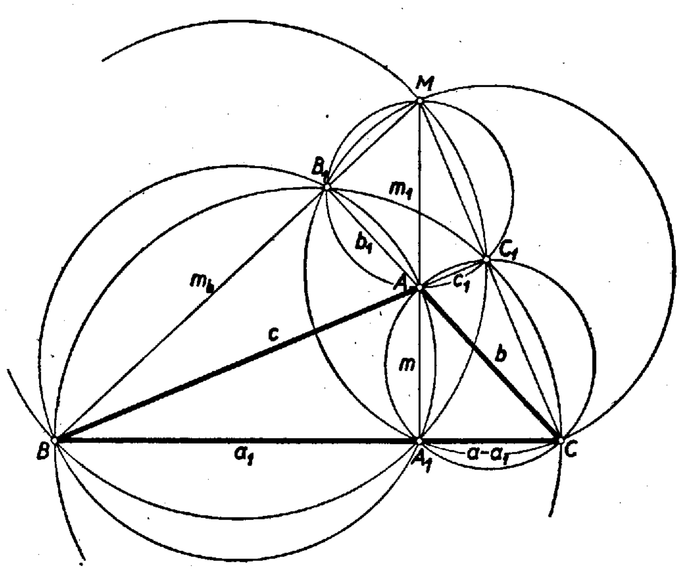
De $b_1 = c\cos\alpha$, és így (α-t illetőleg a hegyesszög és tompaszög esetét összefoglalva)

$$mm_1 = bc\cos\alpha = \frac{|b^2+c^2-a^2|}{2}.$$

Ha α derékszög, akkor $M = A$, vagyis $m_1 = 0$, és így $mm_1 = 0$, amint azt a fenti képlet is mutatja ($b^2+c^2-a^2=0$).

Vámos Péter (Bp., II., Than Károly vegyip. t. II. o. t.)

III. megoldás: Tekintsük mindkét ábránkban az MB_1CA_1 (a 2. ábrában MB_1A_1C), a BC_1B_1C (a 2. ábrában BB_1C_1C) stb. húrnégyszögek köré írt köröket.



2. ábra

Az A csúcspontból kiinduló szelőkre

(1) $$m \cdot m_1 = b \cdot b_1 = c \cdot c_1.$$

Hasonlóképpen az 1. ábrában a C-ből kiinduló szelőkre

(2) $$b(b - b_1) = a(a - a_1),$$

a B-ből kiinduló szelőkre

(3) $$c(c - c_1) = a \cdot a_1.$$

(2) és (3) összege

$$b^2 + c^2 - (bb_1 + cc_1) = a^2,$$

vagyis (1) figyelembevételével

$$b^2 + c^2 - 2m \cdot m_1 = a^2,$$

ahonnan

$$mm_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

A 2. ábrában hasonlóképpen

$$b(b + b_1) = (a - a_1)a,$$
$$c(c + c_1) = a_1 a,$$

és így

$$b^2 + c^2 + (bb_1 + cc_1) = a^2,$$

ahonnan (1) figyelembevételével

$$mm_1 = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2}.$$