a) A keresett egyenlet gyöktényezős alakja, az ismeretlent y-nal jelölve

$$\left(y-\frac{1}{x_1^3}\right)\left(y-\frac{1}{x_2^3}\right)=0.$$

y hatványai szerint rendezve

$$y^2-\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}y+\frac{1}{x_1^3x_2^3}=0,$$

vagyis

(1) $$y^2-\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3}y+\frac{1}{(x_1x_2)^3}=0.$$

Ismeretes, hogy

(2) $$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve megkapjuk a keresett egyenletet:

$$c^3y^2+(b^3-3abc)y+a^3=0.$$

b) Felhasználhatjuk közvetlenül a keresett

$$Ay^2+By+C=0$$

egyenletre a gyökök és együtthatók között fennálló összefüggéseket:

$$\frac{B}{A}=-(y_1+y_2)=-\left[(x_1-x_2)^2+(x_1+x_2)^2\right]=-2(x_1^2+x_2^2)=-2(x_1+x_2)^2+4x_1x_2$$
$$\frac{C}{A}=y_1y_2=\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right](x_1+x_2)^2=(x_1+x_2)^4-4x_1x_2(x_1+x_2)^2.$$

Behelyettesítve a (2) alatti értékeket, a keresett egyenlet

$$y^2+\left(\frac{4c}{a}-\frac{2b^2}{a^2}\right)y+\frac{b^4}{a^4}-\frac{4c}{a}\cdot\frac{b^2}{a^2}=0,$$

vagyis

$$a^4y^2+2a^2(2ac-b^2)y+b^2(b^2-4ac)=0.$$

(Figyeljük meg: ha az eredeti egyenlet diszkriminánsa $b^2-4ac=0$, akkor $x_1-x_2=0$, vagyis y_1 is nullával egyenlő, azaz a keresett egyenlet általános tagja 0, ami tényleg igaz.)

Trón Lajos (Debrecen, Fazekas g. I. o. t.)