Feltéve, hogy $x \neq 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, szorozhatjuk mindkét oldalt az öt nevező szorzatával. x hatványai szerint rendezve:

$$\begin{gathered}(a+b-3)x^4+(-14a-10b+34)x^3+(71a+35b-135)x^2+\\+(-154a-50b+224)x+(120a+24b-120)=\\=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Ez az egyenlet közvetlenül másodfokúvá, vagy másodfokúra visszavezethetővé válik a következő esetekben:

$$\begin{aligned}&\alpha)\quad A=B=0,\\&\beta)\quad D=E=0,\\&\gamma)\quad B=D=0,\\&\delta)\quad A=E=0.\end{aligned}$$

Tekintsük sorra ezeket az eseteket.

$$\alpha)\qquad \begin{aligned}a+\ \ b-\ \ 3&=0,\\7a+5b-17&=0.\end{aligned}$$

Innen $a=1$, $b=2$, mely értékeket (2)-be helyettesítve az

$$x^2-5x+8=0$$

egyenlethez jutunk. Ennek nincs valós gyöke, mert diszkriminánsa $25-32<0$.

$$\beta)\qquad \begin{aligned}77a+25b-112&=0,\\5a+\ \ \ b-\ \ \ 5&=0,\end{aligned}$$

ahonnan

$$a=\frac{13}{48},\quad b=\frac{178}{48}.$$

Ezen értékeket (2)-be helyettesítve:

$$11x^4-75x^3+142x^2=x^2(11x^2+75x+142)=0.$$

Innen $x_{1,2}=0$, x_3, és x_4 nem valós, mert $75^2-44\cdot 142<0$.

$$\gamma)\qquad \begin{aligned}7a+\ \ 5b-\ \ 17&=0,\\77a+25b-112&=0,\end{aligned}$$

ahonnan

$$a=\frac{9}{14},\quad b=\frac{5}{2},$$

és így az

$$x^4-13x^2+120=0$$

egyenlethez jutunk, melynek nincs valós gyöke, mert $169-480<0$.

$$\delta)\qquad \begin{aligned}a+b-3&=0,\\5a+b-5&=0,\end{aligned}$$

ahonnan

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{5}{2},$$

ami az

$$x^3-6x^2+11x=x(x^2-6x+11)=0$$

egyenletre vezet. Ebből $x_1=0$, x_2 és x_3 nem valósak, mert a diszkrimináns negatív.

ε) Ha $a=b=0$, akkor (2) a következő alakot veszi fel (-1-gyel való szorzás után):

$$3x^4-34x^3+135x^2-224x+120=(x-1)(x-5)(3x^2-16x+24)=0.$$

Az $x_1=1$, $x_2=5$ gyököket eleve kizártuk. Maradnak tehát a

$$3x^2-16x+24=0$$

egyenlet gyökei, de ezek sem $(256-288<0)$ valósak.

Ezek a gyökök megegyeznek azokkal, amelyeket akkor kapunk, ha (1)-ben $x \neq 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ feltétel mellett az a és b paramétereket 0-nak vesszük. Ugyanis akkor

$$-\frac{2}{2-x}+\frac{3}{3-x}-\frac{4}{4-x}=0.$$

ami a törtek eltávolítása után:

$$3x^2-16x+24=0.$$

Tehát az $a=b=0$ esetén is másodfokú egyenletre jutunk.

Természetesen a és b még más értékei esetén is lehet egyenletünket másodfokúra visszavezetni, de már csak bonyolultabb átalakításokkal.

Komlósi Ferenc (Makó, József A. g. II. o. t.)