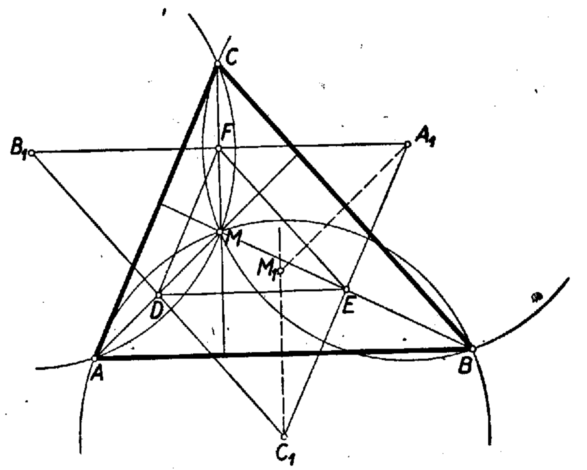
a) Az AM, BM és CM szakaszok felezőpontjai legyenek rendre D, E, F (lásd az ábrát).



Az e pontokban az $ABC\triangle$ magasságvonalaira emelt merőlegesek alkotják az $A_1B_1C_1\triangle$-et. Tehát

$$A_1B_1 \parallel AB, \qquad B_1C_1 \parallel BC \quad \text{és} \quad C_1A_1 \parallel CA, \tag{1}$$

és így

$$A_1B_1C_1\triangle \sim ABC\triangle. \tag{2}$$

A $DEF\triangle$ oldalait az ABM, BCM, CAM háromszögek középvonalai, és így félakkorák, mint az $ABC\triangle$ oldalai. Másrészt (1) alapján DEA_1F_1 valamint $DEFB_1$ négyszögek paralelogrammák, és így $A_1F = ED = FB_1$, vagyis

$$A_1B_1 = 2ED = AB.$$

Tehát (2) figyelembevételével

$$A_1B_1C_1\triangle \cong ABC\triangle.$$

b) Az előbbiekből következik, hogy a D, E, F pontok az $A_1B_1C_1\triangle$ oldalfelező pontjai, és mivel a szerkesztés szerint

$$DM \perp B_1C_1, \qquad EM \perp C_1A_1,$$

azért az M pont az $A_1B_1C_1\triangle$ köré írt körének középpontja.

Az $ABC\triangle$ oldalai rendre húrjai a C_1, A_1, B_1 középpontú és $C_1M = A_1M = B_1M$ sugarú köröknek. Az $A_1B_1C_1$ magasságvonalai (1) alapján merőlegesek az $ABC\triangle$ oldalaira, és azokat, mint húrokat felezik. Tehát az $A_1B_1C_1\triangle$ M_1 magasságpontja egyben az $ABC\triangle$ köré írt körének középpontja.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)