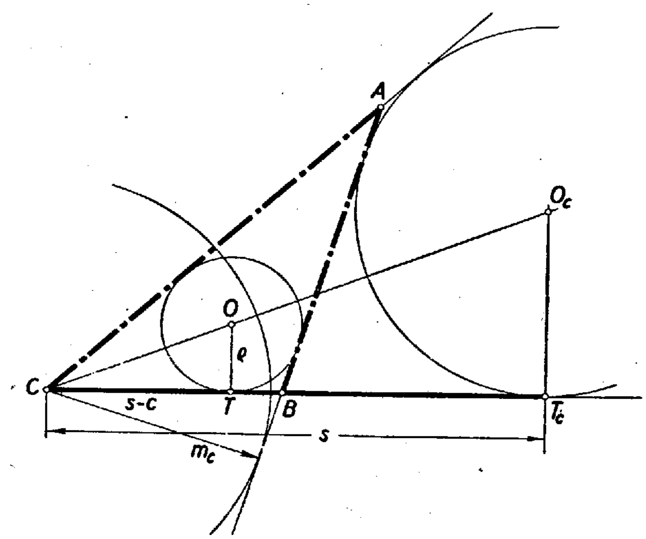
I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak és rajzoljuk meg az ABC háromszög beírt és a c oldalhoz hozzáírt körét. Lásd az 1. ábrát, amely egyben a betűzést is mutatja.



1. ábra

Ismeretes, hogy a C csúcstól T, ill. T_c érintési pontok $s-c$, ill. s távolságnyira vannak, hol s a félkerület.

Az adatokból $s=\frac{d+c}{2}$, és $s-c$ (feltéve, hogy $d>c$) közvetlenül megszerkeszthető.

Már csak ϱ megszerkesztésére van szükségünk.

Ismeretes, hagy a háromszög kétszeres területe

$$2t=c\cdot m_c=\varrho\cdot s,\ \text{ahonnan}\ s:c=m_c:\varrho,$$

és így ϱ negyedik arányosként adódik. (Tehát mindig $m_c>\varrho$.)

A szerkesztés menete tehát: Felveszünk egy C-ből kiinduló félegyenest, amelyre rámérjük a $CT=s-c$ és $CT_c=s$ távolságokat. CT-re T-ben emelt merőlegesre rámérjük a megszerkesztett $\varrho=TO$ szakaszt. A T_c-ben CT-re emelt merőleges, és a CO egyenes metszéspontja O_c. Megrajzolva O és O_c körül az érintő köröket, e két kör másik közös külső érintője lesz a CA oldal hordozója, és egyik belső érintője a BA oldal hordozója. (A másik belső érintő a CO tengelyre szimmetrikus megoldáshoz vezet.)

A megoldhatóság feltétele ($d>c$-n kívül), hogy a megszerkesztett két érintő-kör ne messe egymást két különböző pontban, mert utóbbi esetben nincs közös belső érintő. Ha a két kör érintkezik, akkor egyenlő szárú háromszöghöz jutunk ($a=b$).

Goldperger István (Balassagyarmat, Balassa g. I. o. t.)

II. megoldás: A hozzáírt kör felhasználása nélkül is célhoz érünk, ha a CTO derékszögű háromszög megszerkesztése után a beírt körhöz megszerkesztjük a C-ből másik érintőt, azután C körül m_c sugárral kört rajzolunk (mint láttuk $m_c>\varrho$). A két kör bármelyik közös külső érintője metszi ki a $C\sphericalangle$ száraiból az A és B csúcspontokat (1. ábra).

A megoldhatóság feltétele, hogy $m_c<CO+\varrho$, vagyis

$$(m_c-\varrho)^2<CO^2=(s-c)^2+\varrho^2. \tag{1}$$

De

$$\varrho=\frac{m_c c}{2s}=\frac{m_c c}{d+c},\qquad s-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{d-c}{2},$$

mely értékeket (1)-be helyettesítve, nyerjük, hogy

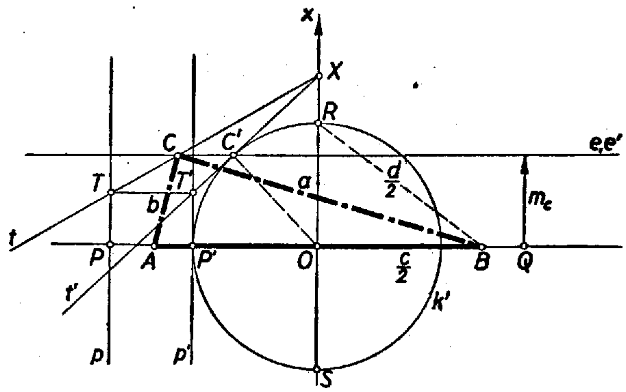
$$m_c^2<\frac{(d-c)^2(d+c)}{4(d-c)}=\frac{d^2-c^2}{4},\quad \text{azaz}\quad m_c<\frac{\sqrt{d^2-c^2}}{2}.$$

Endrődy Tamás (Bp., III., Árpád g. I. o. t.)

III. megoldás: Induljunk ki az $AB=c$ szakaszból. Mivel $a+b=d$, azért a C pontok mértani helye egy olyan ellipszis, amelynek fél nagytengelye $OP==OQ=\frac{d}{2}$, és a fél kistengelye

$$OR=OS=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{d^2-c^2}}{2}.$$

Másrészt a C pontok mértani helye egy AB-vel párhuzamos e egyenes m_c távolságban (2. ábra).



2. ábra

Ezen e egyenes metszi ki az ellipszisből a keresett C pontot. Egyenes és ellipszis metszéspontjának megszerkesztése legegyszerűbben úgy történik, hogy az egyenest átvisszük egy, az ellipszissel affin-rokonságban levő körrendszerbe, a körrendszerben megszerkesztett metszéspontokat azután visszavisszük az ellipszisrendszerbe.

Jelen esetben a legcélszerűbb a kistengely fölé rajzolt k' kört tekinteni az ellipszis affin megfelelőjének. Ez esetben ugyanis a kistengely hordozója az affinitás x tengelye, az affinitás iránya erre merőleges, a nagytengely P végpontjának megfelelője a körön P', és így az e-nek affin megfelelője e' egybeesik e-vel. Az e' metszi a k' kört C'-ben, az ebben húzott t' érintő metszi a p' érintőt T'-ben, és az x tengely X-ben. T' megfelelője az ellipszis rendszerben, a p-n fekvő T. A TX egyenes metszi ki e-ből a keresett C pontot.

Tatai Péter (Bp., XIV., I. István g. I. o. t.)