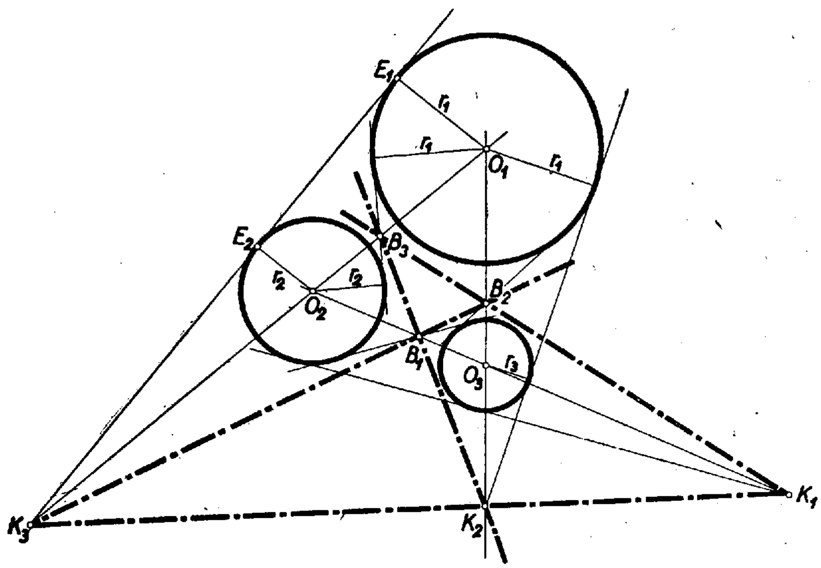
I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



Az O_1O_2 centrálison fekvő külső hasonlósági pont K_3. Nyilvánvaló, hogy

$$K_3E_1O_1\triangle \sim K_3E_2O_2\triangle,$$

és így

$$K_3O_1 : K_3O_2 = r_1 : r_2,$$

amiből következik, hogy K_3 osztó viszonya

$$(O_1O_2K_3) = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Hasonlóképpen

$$(O_2O_3K_1) = -\frac{r_2}{r_3},$$

és

$$(O_3O_1K_2) = -\frac{r_3}{r_1}.$$

Tehát az $O_1O_2O_3\triangle$ oldalain a K_1, K_2, K_3 pontok által létesített osztó viszonyok szorzata

$$\left(-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(-\frac{r_2}{r_3}\right)\left(-\frac{r_3}{r_1}\right) = -1,$$

és ebből – a Menelaos-féle tétel megfordítása alapján – következik, hogy K_1, K_2, K_3 egy egyenesen van.

A B_1, B_2, B_3 belső hasonlósági pontok által az $O_1O_2O_3\triangle$ oldalain létesített osztóviszonyok az előbbiekből csak előjelben különböznek. Tehát két belső hasonlósági pont mindegyikére az osztóviszony pozitív, egy külső hasonlósági pontra nézve pedig negatív, tehát a szorzat ismét -1. Pl.

$$(O_1O_2B_3)(O_2O_3B_1)(O_3O_1K_2) = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_3}\cdot\left(-\frac{r_3}{r_1}\right) = -1$$

és így B_3, B_1 és K_2 egy egyenesen vannak.

Ezzel a feladat második állítását is bebizonyítottuk.

Ujváry-Menyhárt Zoltán (Baja, Ép. ip. t. II. o. t.)

II. megoldás: Feladatunk megoldható térbeli meggondolásokkal. Emeljünk az O_1, O_2 és O_3 pontokban a rajz síkjára merőlegeseket, és ezekre mérjük fel a sík mindkét oldalára rendre a r_1, r_2, r_3 szakaszokat, nyerjük a sík egyik oldalán rendre az M_1, M_2, M_3, a másik oldalán az M_1', M_2', M_3' pontokat.

Ha pl. az M_1M_2 egyenest az O_1O_2 centrális körül a síkba forgatjuk, akkor M_1 és M_2 leforgatásai: (M_1) és (M_2) – az előbbiek alapján – a k_1 ill. k_2 körre kerülnek és (M_1), (M_2) a két kör közötti hasonlóságban egy megfelelő pontpár, mert $O_1(M_1)||O_2(M_2)$. Tehát az (M_1) (M_2) egyenes átmegy a K_3 külső hasonlósági ponton, de akkor a térbeli M_1M_2 egyenes is K_3-ban metszi a O_1O_2 forgatási tengelyt.

Ugyanígy bizonyítható, hogy az M_1M_3 egyenes K_2-ben és az M_2M_3, egyenes K_1-ben döfi a síkot. A K_1, K_2 és K_3 pontok tehát rajta vannak az $[M_1M_2M_3]$ síknak a háromszög síkjával való metszésvonalán.

Ha pl. M_2 helyett tükörképét: M_2'-t tekintjük, akkor teljesen hasonló gondolatmenettel az $[M_1M_2'M_3]$ síknak a háromszög síkjával való metszésvonalán vannak rajta a B_3, B_1, K_2 pontok.

Vékony Lajos (Bp., XX., Kossuth g. II. o. t.)