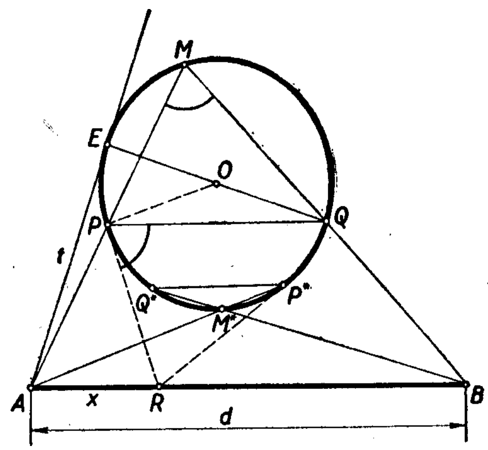
I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak (1. ábra). A P pontban az adott körhöz húzott érintő messe az AB távolságot egy R pontban.



1. ábra

Feladatunk nyilván meg van oldva, ha sikerül az R pontot, ill. az $AR = x$ szakaszt megszerkeszteni. Jelöljük az adott AB szakasz hosszát d-vel, az A pontból az adott körhöz húzott érintő hosszát $AE = t$-vel.

A $PMQ\sphericalangle = RPQ\sphericalangle$, mint a PQ íven nyugvó kerületi szögek. $RPQ\sphericalangle = ARP\sphericalangle$, mint váltószög, mert a feltétel szerint $PQ \parallel AB$. Tehát

$$PMQ\sphericalangle \equiv AMB\sphericalangle = ARP\sphericalangle,$$

és így – mivel az A-nál fekvő szög közös –

$$ARP_\triangle \sim AMB_\triangle.$$

Tehát

$$x : AP = AM : d,$$

vagyis felhasználva az egy ponton átmenő szelőkön keletkezett metszetekre vonatkozó ismeretes tételt

$$x = \frac{AP \cdot AM}{d} = \frac{t^2}{d}.$$

A szerkesztés menete: Megszerkesztjük az $AE = t$ érintő-hosszt. d és t-ből negyedik arányosként $(d : t = t : x)$ nyerjük az x távolságot, ill. az R pontot az AB szakaszon. R-ből az adott körhöz szerkesztett érintő érintési pontja lesz a P pont. Az AP egyenes második metszéspontja az adott körrel a keresett M pont. Mivel R-ből mindenkor két érintő szerkeszthető, azért feladatunknak mindig 2 és csakis 2 megoldása (M és M^*) van.

A szerkesztés igazolása: Azt kell bizonyítani, hogy a megszerkesztett M pontnak a B-vel való összekötése az adott kört olyan Q pontban metszi másodszor, amelyre $PQ \parallel AB$.

A szerkesztésre vezető gondolatmenet megfordításából következik a megszerkesztett R, P és M pontokra, hogy

$$ARP_\triangle \sim AMB_\triangle,$$

vagyis

(1) $$ARP\sphericalangle = AMB\sphericalangle.$$

Mint ugyanazon PQ íven nyugvó kerületi szögek

(2) $$QPR\sphericalangle = PMQ\sphericalangle \equiv AMB\sphericalangle.$$

(1) és (2) egybevetéséből következik, hogy

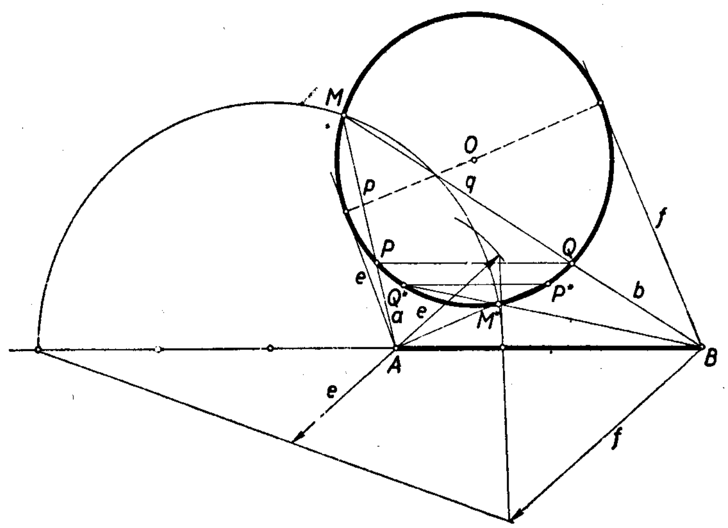
$$QPR\sphericalangle = ARP\sphericalangle,$$

azaz tényleg

$$PQ \parallel AB.$$

(A feladványkitűző megoldása.)

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldva. Legyen $MP = p$, $MQ = q$, $PA = a$, $QB = b$ (2. ábra).



2. ábra

Mivel a feladat szerint $PQ \parallel AB$, azért

$$\frac{a}{b}=\frac{a+p}{b+q}. \tag{3}$$

Az A és B pontokból az adott körhöz húzott érintők hosszát e-, ill. f-fel jelölve,

$$e^2=a(a+p), \tag{4}$$

$$f^2=b(b+q), \tag{5}$$

és így (3) figyelembevételével

$$\frac{e^2}{f^2}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a+p}{b+q}=\frac{(a+p)^2}{(b+q)^2}$$

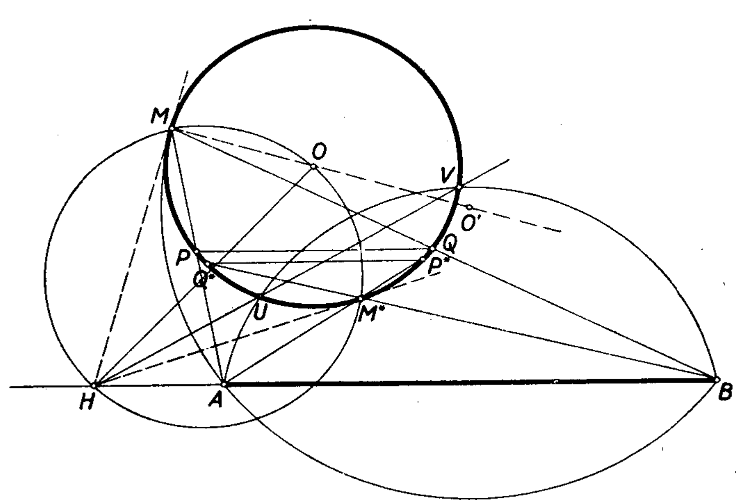
vagyis

$$\frac{e}{f}=\frac{a+p}{b+q}=\frac{MA}{MB}.$$

Eszerint az M pont rajta van az AB szakaszhoz tartozó, $\dfrac{e}{f}$ viszonyszámmal jellemzett Apollonius-féle körön. E kör és az adott kör metszéspontjai szolgáltatják a keresett M és M^* pontokat.

Dobrovolszky András (Bp. I., Toldy F. g. II. o. t.)

III. megoldás: Induljunk ki ismét a megoldott feladatból. A betűzést a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Mivel a feltétel szerint az $MPQ_\triangle$ és $MAB_\triangle$ hasonlóak és hasonló helyzetűek az M külső hasonlósági középpontra, azért ugyanez áll a két háromszög köré írt körökre is, vagyis az $MAB_\triangle$ köré írt kör az M pontban érinti az adott kört.

Feladatunk tehát két adott ponton átmenő, adott kört érintő kör szerkesztése.

Két adott ponton végtelen sok kör megy át, ezek egy körsort alkotnak; a két adott pont, A és B a körsor alappontjai. Az AB egyenes a körsor közös hatványvonala. A hatványvonal tetszőleges P pontjából húzzunk érintőket a körsor köreihez, ezeknek az érintőknek a T érintési pontig terjedő szakaszai már az előbbi két megoldásban felhasznált ismeretes tétel alapján egyenlők; e PT szakasz hosszának meghatározása céljából elegendő a körsor egyetlen tetszőleges körét megrajzolni.

A szerkesztés menete tehát: Szerkesztünk a két adott ponton átmenő, az adott kört metsző, egyébként tetszőleges sugarú kört. E kör messe az adott kört az U és V pontokban. Az AB és UV egyenes metszéspontját jelöljük H-val. A H pont közös hatványpontja az adott körnek és az A, B alappontú körsornak, tehát a körsor azon köreinek is, melyek az adott kört érintik. A H pontból mindezekhez a körökhöz húzott érintőknek az érintési pontig terjedő szakaszai egyenlők. Ezért H-ból az adott körhöz érintőt húzva, az M érintési pont egyben az A-n és B-n átmenő és az adott kört érintő körnek is érintési pontja, HM a két kör közös érintője.

Feladatunknak két megoldása van, mert H-ból az adott körhöz két érintő húzható: HM és HM^*.

Bartha Gyöngyi (Bp. VIII., Apáczai Csere g. II. o. t.)

Megjegyzés: Az I. megoldás jól kiegészíti a II. és III. megoldást. Mikor ugyanis az utóbbi kettő gyakorlatilag nem alkalmazható, mert az Apollonius-kör közép-pontja, ill. a H pont messzire, a rajz keretén kívül esik, akkor az I. megoldás R pontja gyakran felhasználható. Amikor viszont gyakorlatilag az I. megoldás nem vezet célhoz, mert $x > d$ és R nincs a rajz keretén belül, akkor gyakran a II. vagy III. megoldás alkalmazható.