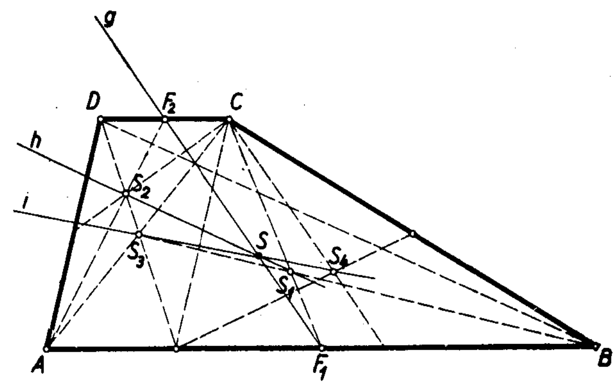
I. megoldás: A súlypont és a súlyvonal fizikai értelmezéséből következnek alábbi tulajdonságaik.

1. Valamely idom súlypontján az idom mindegyik súlyvonala átmegy.
Fordítva: az idom súlypontja rajta van az idom mindegyik súlyvonalán.

2. Ha egy idomot két részre bontunk, s mindkettőnek megszerkesztjük a súlypontját, a két súlypont összekötő egyenes súlyvonala az eredeti idomnak. Ebből következik: ha egy idomból levágunk egy darabot, és megszerkesztjük az eredeti idom és a levágott idom súlypontját, ezek összekötő egyenese a csonkított idomnak is súlyvonala. Továbbá: ha egy idomhoz hozzáillesztünk egy másik idomot és megszerkesztjük a megnövelt idomnak és a hozzáillesztett idomnak a súlypontját, e két súlypont összekötő egyenese az eredeti idomnak is súlyvonala.

Ezek alapján a trapéznak tetszőleges számú súlyvonalát módunkban van megszerkeszteni és bármely két súlyvonal metszéspontja megadja a keresett súlypontot.

Néhány súlyvonal szerkesztését itt adjuk (1. ábra):



1. ábra

a) Hosszabbítsuk meg a trapéz szárait és egészítsük ki a trapézt háromszöggé. A kiegészítő háromszög és a megnövelt idom súlypontjának összekötő egyenese a trapéznak is súlyvonala; ez a két párhuzamos oldal felezőpontjának g összekötő egyenese.

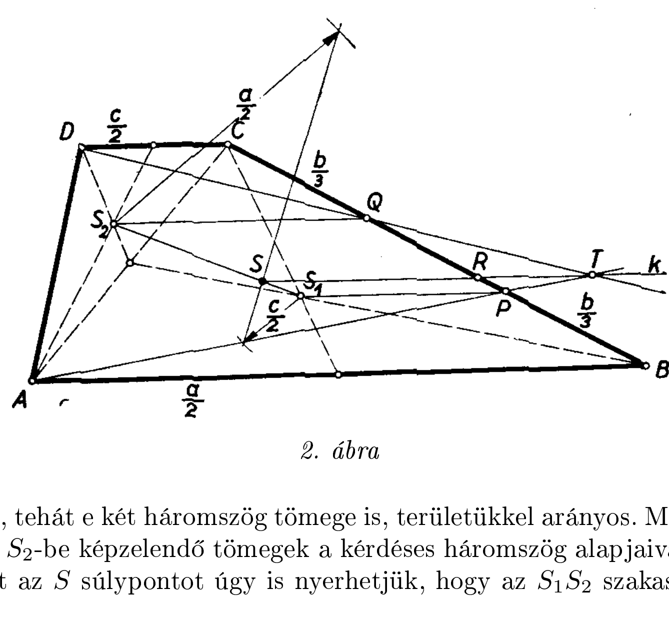
b) Bontsuk a trapézt egyik átlójával két háromszögre, a két háromszög súlypontjának összekötő h egyenese szintén súlyvonala a trapéznak. (E súlyvonal párhuzamos a trapéz másik átlójával, ami abból következik, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalat $2:1$ arányban osztja.)

c) Bontsuk szét a trapézt egy paralelogrammára és egy háromszögre, a paralelogramma középpontját kössük össze a háromszög súlypontjával. Ez az i egyenes is súlyvonala a trapéznak, stb.

Bácsy Ernő (Bp. VIII., Fazekas g. II. o. t.)

II. megoldás: Ha az S_1 pontban m_1 tömeget, az S_2 pontban pedig m_2 tömeget képzelünk egyesítve, akkor a két tömeg közös S súlypontja az S_1S_2 egyenesen van, a nagyobb tömeghez közelebb, és S az S_1S_2 szakaszt az m_2 és m_1 tömegek arányában osztja.

Bontsuk fel a trapézt egyik átlójával két háromszögre és szerkesszük meg ezek S_1 és S_2 súlypontját (2. ábra).



2. ábra

Homogén lemezek tömege, tehát e két háromszög tömege is, területükkel arányos. Miután azonban a két háromszög magassága egyenlő, az S_1, és S_2-be képzelendő tömegek a kérdéses háromszög alapjaival, tehát a párhuzamos oldalak hosszával arányosak. Eszerint az S súlypontot úgy is nyerhetjük, hogy az S_1S_2 szakaszt a párhuzamos oldalak $c:a$ arányában osztjuk.

Csizmadia Lajos (Orosháza, Táncsics g. II. o. t.)

III. megoldás: A II. megoldás lehetővé teszi, hogy még két igen egyszerűen megszerkeszthető súlyvonalat találjunk. Az S_1 és S_2 és S pontoknak a párhuzamos oldalakkal párhuzamos vetületei a trapéz BC oldalán legyenek P, Q és R (2. ábra). A szerkesztés szerint P és Q három egyenlő részre osztja BC-t. Az R pont pedig – mint láttuk – a középső $\frac{b}{3}$ hosszúságú PQ szakaszt $c:a$ arányban osztja.

Osszuk megfordítva a BC oldalt a P és Q pontokkal 3 részre. Az AP és DQ egyenesek (2. ábra) messék egymást a T pontban. Azt állítjuk, hogy a T ponton át AB-vel párhuzamosan húzott k egyenes súlyvonal.

Az előbbiek alapján csak azt kell bebizonyítani, hogy a k egyenes a $PQT\triangle$ PQ oldalát olyan R pontban metszi, amelyre nézve

$$\frac{PR}{QR}=\frac{c}{a}.$$

De

$$ABP\triangle\sim TRP\triangle,\quad \text{és így}\quad PR:PB=RT:AB,$$

vagyis

$$PR=\frac{PB\cdot RT}{AB}=\frac{b\cdot RT}{3\cdot a}.$$

Hasonlóképpen nyerjük, hogy

$$QR=\frac{CQ\cdot RT}{CD}=\frac{b\cdot RT}{3\cdot c}.$$

Tehát $\frac{PR}{QR}=\frac{c}{a}$, ami bizonyítandó volt.

IV. megoldás: A 2. ábráról könnyen leolvasható, hogy

$$BR=\frac{b}{3}+\frac{c}{a+c}\cdot\frac{b}{3}=\frac{b}{3}\left(1+\frac{c}{a+c}\right)=\frac{b}{3}\cdot\frac{a+2c}{a+c}$$

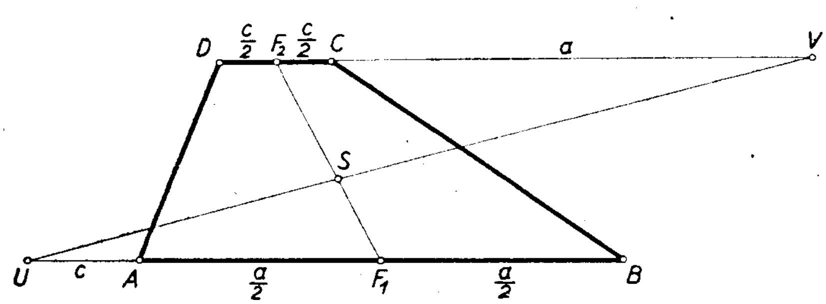
és

$$CR=\frac{b}{3}+\frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{3}=\frac{b}{3}\left(1+\frac{a}{a+c}\right)=\frac{b}{3}\cdot\frac{2a+c}{a+c}$$

tehát

$$\frac{BR}{CR}=\frac{a+2c}{2a+c}.$$

Ez a viszonyszám vezet a következő legegyszerűbb – és ennélfogva a gyakorlatban leggyakrabban alkalmazott – szerkesztéshez.



3. ábra

Hosszabbítsuk meg az AB oldalt az A-n túl, $AU=c$-vel, a CD oldalt ellenkező irányban $CV=a$-val (3. ábra), akkor UV újabb súlyvonal. Az

$$UF_1S\triangle\sim VF_2S\triangle,$$

hasonlóságból ugyanis

$$\frac{F_1S}{F_2S}=\frac{F_1U}{F_2V}=\frac{\frac{a}{2}+c}{a+\frac{c}{2}}=\frac{a+2c}{2a+c},$$

amiből az állítás következik.

Szabadits Ödön (Bp. XX., Kossuth g. I. o. t.)

Megjegyzés: A hiányos megoldásokban legtöbbnyire az indoklás hiányzott. Volt néhány helytelen megoldás is azzal az állítással, hogy a területfelező egyenes súlyvonal, holott ez csak akkor igaz, ha a félterületek súlypontjai a felező egyenestől egyenlő távolságra vannak. Helytelen megoldás az is, hogy a trapéz négy csúcspontjára ható párhuzamos irányú egyenlő erők támadópontját szerkesztjük. Ez a négy csúcspontból álló rendszer súlypontja, de nem a trapézé.