Induljunk ki az

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

azonosságból. Innen a baloldal második tagját elhagyva és 2-vel osztva, valós a és b esetén

$$\frac{1}{2}(a+b)^2\le a^2+b^2.$$

Alkalmazzak ezt az egyenlőtlenséget az $a=x+\dfrac{1}{x}$ és $b=y+\dfrac{1}{y}$ esetén.
A két oldalt felcserélve.

Figyelembevéve az $x+y=1$ feltételt

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\ge\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2, \tag{1}$$

ahol ez egyenlőség jele csak akkor áll fenn, ha $x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}$.

A jobboldal akkor a legkisebb, ha $\dfrac{1}{xy}$ a legkisebb.

Ismeretes, hogy két pozitív szám mértani középarányosa kisebb a számtani középarányosnál, tehát esetünkben

$$xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

ahonnan

$$\frac{1}{xy}\ge 4 \tag{2}$$

és az egyenlőség jele csak $x=y$ esetén áll fenn, amely esetben azonban (1)-ben is az egyenlőség jele érvényes.

(2) figyelembevételével (1) így írható

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\ge\frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2},$$

ami bizonyítandó volt.

Az egyenlőség jele akkor áll, ha $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Ádám Antal (Bp. VIII., Széchenyi g. II. o. t.)