I. megoldás: a) Jelöljük a befogókat a, b-vel, az átfogót c-vel, a keresett távolságot x-szel.

A feladat értelmében

$$\frac{(a-x)(b-x)}{2}=\frac{ab}{4},$$

vagy rendezve

$$2x^2-2(a+b)x+ab=0$$

ahonnan

$$x_{1,2}=\frac{2(a+b)\pm\sqrt{4(a^2+2ab+b^2)-8ab}}{4}=$$
$$=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{a+b\pm c}{2}.$$

Tehát

$$x_1=\frac{a+b-c}{2}=s-c=\varrho,$$

ahol s a háromszög félkerülete és ϱ a beírt kör sugara.

A megrövidített befogók hossza:

$$a-\varrho=a-\frac{a+b-c}{2}=\frac{a-b+c}{2}=s-b,$$
$$b-\varrho=b-\frac{a+b-c}{2}=\frac{b-a+c}{2}=s-a.$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az $x_2=\dfrac{a+b+c}{2}=s$ gyököt vesszük figyelembe és a negatív $a-s$ valamint $b-s$ helyett az abszolút értékeket: $(s-a)$-t és $(s-b)$-t tekintjük.

b) Jelöljük a keresett távolságot y-nal. A feladat szerint

$$a+b+c=2(a-y)+2(b-y),$$

ahonnan

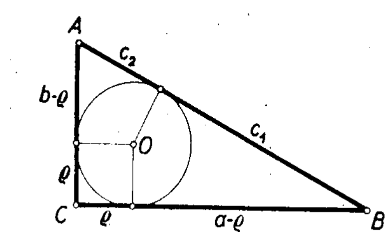
$$4y=2a+2b-a-b-c=a+b-c,$$

és így

$$y=\frac{a+b-c}{4}=\frac{s-c}{2}=\frac{\varrho}{2}.$$

Behringer Tibor (Bp. III., Árpád g. III. o. t.)

II. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



Jelöljük az eredeti háromszög területét t-vel. A 251. gyakorlatban bizonyítottuk, hogy

$$c_1c_2=t,\quad \text{vagyis}\quad \frac{c_1c_2}{2}=\frac{t}{2}$$

De $c_1=a-\varrho$, $c_2=b-\varrho$, és így nyilvánvaló, hogy ϱ-val kell a derékszögű háromszög befogóit megrövidíteni, hogy félakkora területű derékszögű háromszög befogóit kapjuk.

b) A derékszögű háromszög kerülete

$$2c_1+2c_2+2\varrho,$$

és így a téglalap félkerülete, vagyis két szomszédos oldalának összege

$$c_1+c_2+\varrho=\left(c_1+\frac{\varrho}{2}\right)+\left(c_2+\frac{\varrho}{2}\right)=\left(a-\frac{\varrho}{2}\right)+\left(b-\frac{\varrho}{2}\right).$$

Tehát $\dfrac{\varrho}{2}$-vel kell a befogókat megrövidíteni, hogy ugyanakkora kerületű téglalap szomszédos oldalait nyerjük.

Gelencsér László (Pannonhalma, Bencés g. II. o. t.)