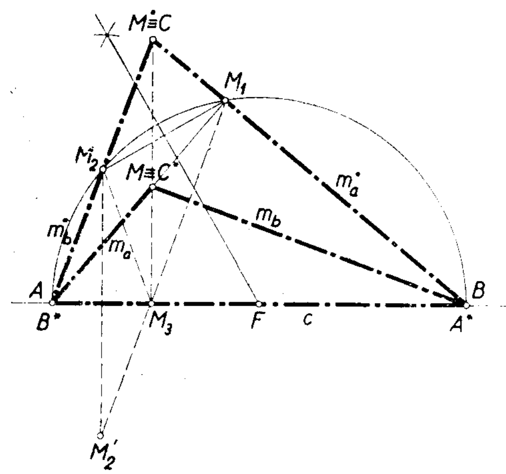
I. megoldás: A keresett háromszög c oldala az adott M_1 és M_2 pontokból derékszög alatt látszik, tehát M_1 és M_2 a c oldal, mint átmérő fölé rajzolt Thales-körön van. E Thales-kör középpontja M_1 és M_2-től egyenlő távolságra van, tehát az M_1M_2 szakaszt merőlegesen felező egyenes metszi ki a c egyenesből a Thales-kör F középpontját (1. ábra).



1. ábra

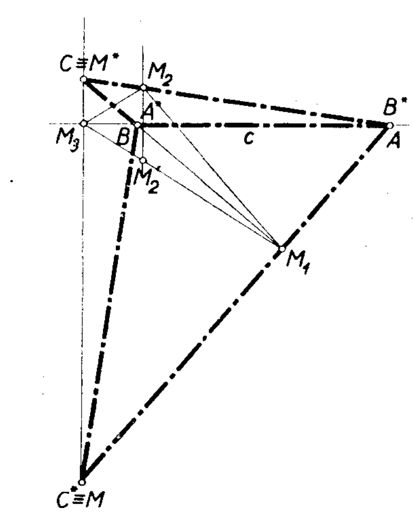
Az $FM_1 = FM_2$ sugarú Thales-kör metszi a c egyenest az $A = B^*$ és $B = A^*$ pontokban. E jelölésnek megfelelően két megoldást nyerünk: az ABC és $A^*B^*C^*$ háromszögeket.

Okoskodásunkban sehol sem használtuk fel azt a körülményt, hogy M_1, M_2 a c egyenes ugyanazon vagy különböző oldalára esik, tehát szerkesztésünk mind a két esetben alkalmazható, és – mint láttuk – általában 2 megoldást ad.

Ha M_1 és M_2 a c oldal ugyanazon oldalára esik, akkor az egyik megoldás hegyesszögű a másik olyan tompaszögű háromszög, amelyben c a legnagyobb oldal. Ha M_1 és M_2 a c egyenes által el vannak választva, akkor mindkét megoldás tompaszögű és c egyikben sem a legnagyobb oldal. A feladatnak nincs megoldása, ha $M_1M_2 \perp c$, mert ez esetben M_1M_2 felező merőleges és c párhuzamosak. Nincs megoldás akkor sem, ha az M_1 és M_2 pontok a c egyenes két különböző oldalán, de c-től egyenlő távolságra vannak, mert ez esetben $AM_1 \parallel BM_2$ és $A^*M_1 \parallel B^*M_2$. Ha az előbbi két eset egyszerre következik be, vagyis M_1 és M_2 a c-re, mint tengelyre, tükröshelyzetű, akkor az F pont a c bármelyik pontja lehet. Ez esetben tehát végtelen sok meóoldás van.

Király Endre (Nagykőrös, Arany János g. II. o. t.)

II. megoldás: Feladatunkat megoldottuk, ha megszerkesztettük $M_1M_2M_3$, talpponti háromszöget, vagyis a még hiányzó M_3 pontot a c egyenesen. Ismeretes, hogy a magasságvonalak felezik a talpponti háromszög szögeit. Tehát, ha M_2-nek c-re vonatkozó M_2 tükörképét összekötjük M_1-gyel, ez az összekötő egyenes metszi ki c-ből az M_3 pontot (1. es 2. ábra).



2. ábra

Az $M_1M_2M_3$ talpponti háromszögnek M_1- és M_2-ből kiinduló (belső és külső) szögfelezői metszik ki a c egyenesből az $A = B^*$ és $B = A^*$ pontokat, míg az egymással való metszéspontok szolgáltatják C, illetőleg C^* pontokat. Könnyű belátni, hogy C, ill. C^* az $A^*B^*C^*_\triangle$ ill. $ABC_\triangle$ magasságpontja, és mint ilyen szükségképpen rajta van az M_3-ban a c-re emelt merőlegesen.

Megjegyzés: Az $A(\equiv B^*)$, $B(\equiv A^*)$, $C(\equiv M^*)$ és $C^*(\equiv M)$ pontok az $M_1M_2M_3$ talpponti háromszögbe írt és hozzáírt köreinek középpontja.

Tanulságos a I. megoldásban végzett taglalást a II. megoldásban – a talpponti háromszöggel kapcsolatban – is elvégezni, de ezt már az olvasóra bízzuk.