I. megoldás: Egyenletünk mindkét oldalát köbre emelve

$$\sqrt{5}+x+3\sqrt{(\sqrt{5}+x)^2(\sqrt{5}-x)}+3\sqrt{(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)^2}+\sqrt{5}-x=5\sqrt{5}.$$

Összevonva és 3-mal egyszerűsítve

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5}+x)^2(\sqrt{5}-x)}+\sqrt[3]{(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)^2}=\sqrt{5}.$$

A baloldalon a közös tényezőt kiemelve

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+x}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-x}\right)=\sqrt{5}.$$

Ezt az eredeti egyenlettel osztva

$$\sqrt[3]{5-x^2}=1,$$

amiből

$$5-x^2=1,$$

és így

$$x_1=2, \qquad x_2=-2.$$

Mivel mindenütt azonos átalakítást végeztünk (a köbgyökvonás a valós számok körében egyértelmű), azért a nyert gyökök ki is elégítik az eredeti egyenletet.

Próba:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}=\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{5}+16}{8}}=\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}+1}{8}}=$$
$$=\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Hasonlóképpen

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

és így tényleg

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}.$$

Grell Mihály (Bp. XVI., Corvin Mátyás g. II. o. t.)

II. megoldás: Legyen

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+x}=u, \qquad \sqrt[3]{\sqrt{5}-x}=v,$$

akkor nyilván

(1) $$u^3+v^3=2\sqrt{5}.$$

A feladat értelmében

(2) $$u+v=\sqrt{5}.$$

(1)-et osztva (2)-vel

(3) $$u^2-uv+v^2=2.$$

(2) négyzete

(4) $$u^2+2uv+v^2=5.$$

(4) és (3) különbsége

$$3uv=3, \quad \text{azaz} \quad uv=1,$$

és így

$$u^3v^3=(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)=5-x^2=1,$$

amiből

$$x=\pm 2.$$

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)