

I. megoldás: Adjuk össze a három egyenletet, és emeljük ki a közös $(x + y + z)$ tényezőt.

$$(x + y + z)(x + y + z) = (x + y + z)^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

ahonnan

$$x + y + z = \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$x + y + z$ ezen értékét az eredeti egyenletekbe helyettesítve, és feltéve, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, vagyis a, b, c közül legalább az egyik nem 0, nyerjük a következő két gyökrendszert:

$$x_{12} = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$y_{12} = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$z_{12} = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(Egy gyökrendszeren belül ugyanaz az előjel veendő.)

Csákvári István (Bp. III., Árpád g. II. o. t.)

Megjegyzés: A fenti megoldás helyes, ha az a, b és c mennyiségek közül egy, vagy két mennyiség 0. Ha $a = b = c = 0$, akkor egyenletrendszerünk az

$$x + y + z = 0$$

határozatlan egyenletbe megy át.

II. megoldás: Láttuk, hogy a, b, c közül legalább egyiknek 0-tól különböznie kell. Tegyük fel, hogy $a \neq 0$, akkor szabad a (2) és (3)-at (1)-gyel osztani. Tehát

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{amiből} \quad (4) \quad y = \frac{b^2}{a^2}x,$$

$$\frac{z}{x} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \text{amiből} \quad (5) \quad z = \frac{c^2}{a^2}x.$$

Az így nyert értékeket az (1) egyenletbe helyettesítve

$$x \left(x + \frac{b^2}{a^2}x + \frac{c^2}{a^2}x \right) = x^2 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2} = a^2,$$

ahonnan

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

x ezen értékét (4) és (5)-be helyettesítve ugyanazt a gyökrendszert nyerjük, mint az I. megoldásban.

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)