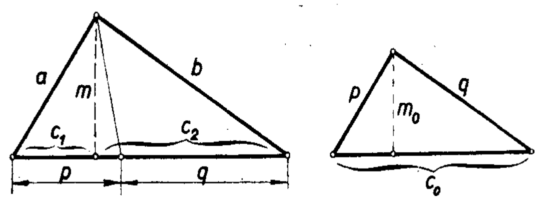
I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ismeretes, hogy

$$m=\sqrt{c_1 c_2}. \tag{1}$$

c_1 és c_2-t kell az adott p és q-val kifejezni. Ez közvetlenül nem sikerül, de tudjuk c_1 és c_2-t előbb a befogókkal kifejezni és aztán felhasználhatjuk a szögfelező tételét, mely szerint

$$\frac{p}{q}=\frac{a}{b}. \tag{2}$$

Ismeretes továbbá, hogy

$$a^2=c_1\,c \tag{3}$$

$$b^2=c_2\,c. \tag{4}$$

(3)-at elosztva (4)-gyel, (2) figyelembe vételével

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{p^2}{q^2}, \tag{5}$$

másrészt

$$c_1+c_2=p+q. \tag{6}$$

(5) és (6)-ból c_1 és c_2, és így c_1c_2 is meghatározható.

(5)-ből

$$c_1=\frac{c_2p^2}{q^2},$$

mely értéket (6)-ba helyettesítve

$$\frac{c_2p^2}{q^2}+c_2=p+q,$$

amiből

$$c_2=\frac{(p+q)q^2}{p^2+q^2},\qquad \text{és így}\qquad c_1=\frac{(p+q)p^2}{p^2+q^2}.$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve

$$m=\sqrt{\frac{(p+q)^2p^2q^2}{(p^2+q^2)^2}}=\frac{(p+q)pq}{p^2+q^2}.$$

Grell Mihály (Budapest, XVI., Corvin Mátyás g. II. o.)

II. megoldás: A szögfelező tétel alapján

$$\frac{p}{q}=\frac{a}{b},\quad \text{vagyis}\quad a=\lambda p\quad \text{és}\quad b=\lambda q, \tag{1}$$

ahol λ az arányossági tényező.

Írjuk fel a derékszögű háromszög kétszeres területét kétféleképpen:

$$2t=ab=cm.$$

(1) felhasználásával és tekintetbe véve, hogy $c=p+q$

$$\lambda^2pq=(p+q)m,$$

amiből

$$(2) \qquad m=\lambda^2\frac{pq}{p+q}.$$

Már csak λ^2 meghatározására van szükség. Ez Pythagoras tételének felhasználásával történhetik:

$$\lambda^2p^2+\lambda^2q^2=(p+q)^2,$$

ahonnan

$$\lambda^2=\frac{(p+q)^2}{p^2-q^2}.$$

λ^2 ezen értékét (2)-be helyettesítve

$$m=\frac{(p+q)^2}{p^2+q^2}\cdot\frac{pq}{p+q}=\frac{(p+q)pq}{p^2+q^2}.$$

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. I. o. t.)

III. megoldás: A szögfelező tétel alapján a p és q befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög hasonló az eredetihez (1. ábra).

A kis háromszög kétszeres területe

$$2t_0=pq=m_0c_0=m_0\sqrt{p^2+q^2},$$

amiből

$$m_0=\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

A két háromszög hasonlósága miatt

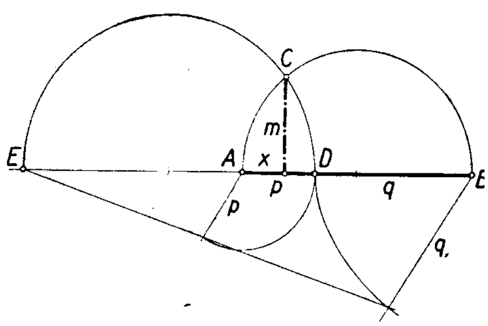
$$m:m_0=c:c_0,$$

vagyis

$$m=m_0\frac{c}{c_0}=\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}}\cdot\frac{p+q}{\sqrt{p^2+q^2}}=\frac{(p+q)pq}{p^2+q^2}.$$

Gerőfy Klára (Ózd, József Attila g. III o. t.)

IV. megoldás: Arra a kérdésre, hogy »mekkora« a magasság, szerkesztéssel is felelhetünk. Induljunk ki a $p+q=AB$ átfogóból (2. ábra).



2. ábra

A derékszögű háromszög C csúcspontjának mértani helye, egyrészt az átfogó fölé rajzolt Thales-kör, másrészt az AB távolsághoz tartozó $\frac{p}{q}$ aránynak megfelelő Apollonius-féle kör. E két kör metszéspontjának, C-nek távolsága az átfogótól a keresett m magasság.

Kim Ju Szon (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)

Megjegyzés: A szerkesztés alapján ki is számíthatjuk m-et a következő módon.

Az Apollonius–körből adódik

$$\frac{EA}{EB}=\frac{DA}{DB}=\frac{p}{q},\quad \text{azaz}\quad q\cdot EA=p(EA+p+q).$$

Innen

$$EA=\frac{p(p+q)}{q-p},\quad EB=\frac{q(p+q)}{q-p}.$$

A húrok szeleteinek szorzatát a két kör közös húrjára alkalmazva

$$m^2 = x(p+q-x) = (p+q)x - x^2,$$
$$m^2 = (p-x)(EA+x) = \frac{p^2(p+q)}{q-p} - \frac{2p^2}{q-p}x - x^2.$$

A kettőt összehasonlítva nyerjük, hogy

$$\frac{q^2+p^2}{q-p}x = \frac{p^2(p+q)}{q-p}, \quad x = \frac{p^2(p+q)}{p^2+q^2}, \quad p+q-x = \frac{q^2(p+q)}{p^2+q^2},$$

és így

$$m^2 = \frac{p^2(p+q)}{p^2+q^2} \cdot \frac{q^2(p+q)}{p^2+q^2}, \quad m = \frac{pq(p+q)}{p^2+q^2}.$$