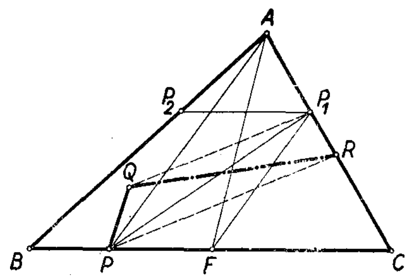
Legyen a BC oldal felezőpontja F. Nem megy az általánosság rovására, ha a P pontot a BF szakaszon vesszük fel. (A $P \equiv B$ esetet a 161. sz. gyakorlatban már letárgyaltuk, a $P \equiv F$ esetet külön fogjuk tárgyalni.)

Az F ponton át a PA egyenessel húzott párhuzamos messe az AC oldalt a P_1 pontban, a P_1-en át BC-vel húzott párhuzamos pedig az AB oldalt a P_2 pontban. (1., 2., és 3. ábra.)

A PP_1 szakasz felezi a háromszög területét, mert

$$t_{CPP_1} = t_{CFP_1} + t_{FP_1P} = t_{CFP_1} + t_{FP_1A} = t_{CFA} = \frac{1}{2} t_{ABC}. \tag{1}$$

A keresett R pont szerkesztése szempontjából 3 esetet kell megkülönböztetni: 1. Q a BFP_1P_2 négyszög, 2. Q az $FCP_1\triangle$, 3. Q az $AP_1P_2\triangle$ belsejében van. (A határesetekre külön kitérünk.)

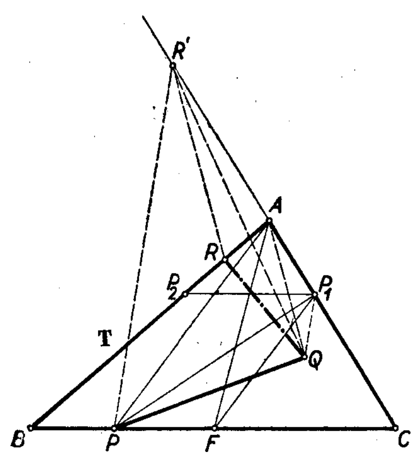


1. ábra

1. esetben (1. ábra) a P ponton át P_1Q egyenessel húzott párhuzamos egyenes metszi ki AC szakaszból a keresett R pontot. P_1Q félegyenes két határhelyzete P_1F és P_1P_2. A P_1Q egyenessel párhuzamos PR egyenesek határhelyzetei nyilván az előbbi határhelyzetekkel párhuzamos PA és PC egyenesek, amiből következik, hogy R mindig A és C közé esik.

(1) figyelembevételével

$$t_{PQRC} = t_{CPR} + t_{PRQ} = t_{CPR} + t_{PRP_1} = t_{CPP_1} = \frac{1}{2} t_{ABC}.$$



2. ábra

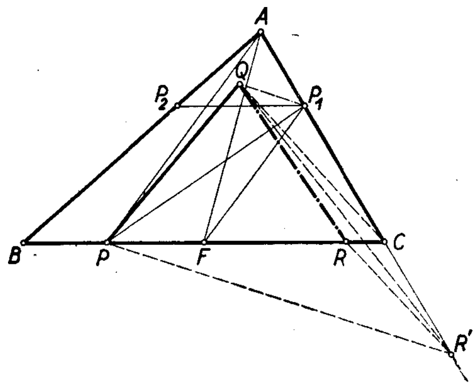
2. esetben (2. ábra) a P ponton át a P_1Q egyenessel húzott párhuzamos az AC oldalt a meghosszabbításán metszi egy R' pontban, mely közelebb van A-hoz, mint C-hez. $t_{PQR'C}$ most is egyenlő $\frac{1}{2} t_{ABC}$. Ugyanis

$$t_{PQR'C} = t_{P_1CPQ} + t_{P_1QR'} = t_{P_1CPQ} + t_{P_1QP} = t_{CPP_1}. \tag{2}$$

Ha az R' pontot a QA egyenessel párhuzamosan eltoljuk az AB oldalra, akkor megkapjuk az R pontot, mégpedig mindig az AB szakaszon. Ugyanis P_1Q határhelyzetei P_1F és P_1C, és így a P_1Q egyenessel párhuzamos PR' szükségképpen az AB szakaszon fekvő T pontban metszi az AB egyenest. Mivel $P_1QA\sphericalangle$ és $TR'R\sphericalangle$ váltószögek, azért az R szükségképpen a TA szakaszon van.

$$t_{RACPQ} = t_{PQAC} + t_{AQR} = t_{PQAC} + t_{AQR'} = t_{PQR'C},$$

amely utóbbi terület (2) alapján egyenlő $\frac{1}{2} t_{ABC}$.



3. ábra

3. esetben (3. ábra) a P ponton át P_1Q egyenessel húzott párhuzamos az AC egyenest olyan R' pontban metszi, mely szintén az AC meghosszabbításán fekszik, de most közelebb C-hez, mint A-hoz. ($PQR'C$ most hurkolt négyszög.)

$$i_{QP_1CP} = t_{CPP_1} + t_{QP_1P} = t_{CPP_1} + t_{QP_1R}. \tag{3}$$

De

$$t_{QP_1R'} = t_{QP_1C} + t_{QCR'}. \tag{4}$$

Az R ponton át QC-vel húzott párhuzamos metszi a BC szakaszt az R pontban, tehát $t_{QCR'} = t_{QCR}$, és így (4) alapján

$$t_{QP_1R'} = t_{QP_1C} + t_{QCR} = t_{QP_1CR}.$$

$t_{QP_1R'}$ ezen értékét (3)-ba helyettesítve

$$t_{QP_1CP} = t_{CPP_1} + t_{QP_1CR},$$

amiből

$$t_{QP_1CP} - t_{QP_1CR} = t_{PQR} = t_{CPP_1} = \frac{1}{2} t_{ABC}.$$

4. A határesetekben, midőn Q az FP_1, ill. P_1P_2 szakaszokon van, akkor az R pont – az előbbiek alapján – az A, ill. C pontba kerül.

5. Hátra van még az az eset, midőn $P \equiv F$. Ez esetben $P_1 = P_2 = A$, és az R pont, az 1. esetben alkalmazott szerkesztéssel, az AC, ill. AB oldalra kerül, aszerint, amint Q pont az $AFB\triangle$, ill. $AFC\triangle$ belsejében van.

6. A legspeciálisabb eset $P \equiv F$ és Q rajta van az AF súlyvonalon. Ez esetben $R \equiv A$ és a PQR tört vonal az FA súlyvonallá fajul.

Amint látjuk az 1., 2. és 5. esetben a törtvonal a háromszöget egy négyszögre és egy ötszögre, a 3. esetben egy háromszögre és egy hatszögre, a 4. esetben két négyszögre, ill. egy háromszögre és egy ötszögre, míg a 6. esetben két háromszögre bontja.

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. II. o. t.)