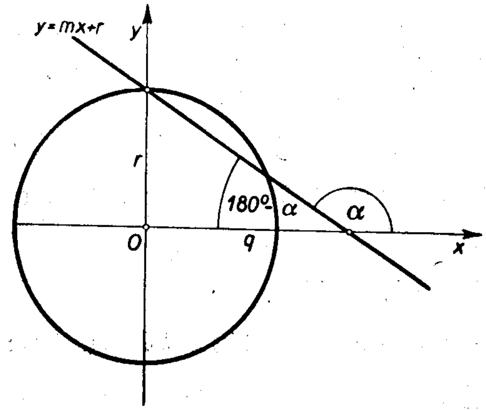
I. megoldás: Mint ismeretes, az $x^2+y^2=r^2$ egyenlet az r sugarú kör középponti egyenlete a derékszögű koordinátarendszerben. Legyen r racionális szám. Ha sikerül bebizonyítani, hogy a kör a sík végtelen sok olyan pontján megy át, melynek koordinátái racionális számok, a feladatot megoldottuk.



Rajzoljunk egy tetszőleges egyenest, mely az ordináta–tengelyből r szakaszt metsz ki (lásd ábrát). Ezen egyenes egyenlete
$$y=mx+r,$$
ahol m az egyenes iránytangense.

Határozzuk meg a kör és ezen egyenes metszéspontjainak koordinátáit. E célból helyettesítsük be az $y=mx+r$ értékét a kör egyenletébe:
$$x^2+m^2x^2+2mrx+r^2=r^2,$$
amiből
$$x_1=0,\qquad y_1=r,$$
és
$$x_2=-\frac{2mr}{m^2+1},\qquad \text{és így}\qquad y_2=\frac{-2m^2r+r(m^2+1)}{m^2+1}=-\frac{r(m^2-1)}{m^2+1}.$$

x_2 és y_2 akkor lesz racionális, ha az iránytangens m racionális. $m=\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\frac{r}{q}$. Tehát m racionális, ha q (az x tengelyből levágott szakasz hossza) racionális. Mivel pedig az x számegyenesen végtelen sok racionális abszcisszájú pont van, azért ilyen q, ehhez tartozó egyenes és metszéspont is végtelen sok van, amivel a tételt bebizonyítottuk.

Ádám Antal (Bp. VIII., Széchenyi g. II. o. t.)

II. megoldás: Pythagorasi számhármasnak nevezzük azokat a pozitív egész számokból álló számhármasokat, melyekre a

$$z^2=x^2+y^2 \tag{1}$$

egyenlet teljesül.

Bizonyítható (lásd »Számokról és alakzatokról« című szakköri füzetet), hogy ha az u és v egészek, relatív prímek, és egyikük páros, másikuk páratlan, akkor az
$$x=2uv$$
$$y=u^2-v^2$$
$$z=u^2+v^2$$
kifejezések segítségével végtelen sok, egymás között relatív prím x, y, z egész szám állítható elő, melyek az (1) egyenletet kielégítik.

Legyen a felbontandó szám t^2, ahol t racionális szám. Szorozzuk meg (1)-et $\frac{t^2}{z^2}$-tel
$$z^2\frac{t^2}{z^2}=x^2\frac{t^2}{z^2}+y^2\frac{t^2}{z^2},$$
vagyis
$$t^2=\left(\frac{xt}{z}\right)^2+\left(\frac{yt}{z}\right)^2.$$

Mivel t racionális és x, y, z egész, azért $\frac{xt}{z}$ és $\frac{yt}{z}$ is racionális. Ezzel t^2-et felbontottuk végtelen sokféleképpen két racionális szám négyzetének összegére.

Kozma Tibor (Győr, Czuczor g. II. o. t.)

III. megoldás: Legyen a felbontandó racionális szám négyzete t^2. Jelöljük az első racionális számot x-szel, a másodikat y-nal és írjuk az utóbbit $y = ax - b$ alakban, ahol az a és b racionális paraméterek szabadon választhatók. Feladatunk értelmében

$$x^2 + (ax - b)^2 = t^2,$$

vagyis

$$x^2(a^2 + 1) - 2abx + b^2 = t^2.$$

Egy másodfokú egyenlet gyökei általában nem racionálisok, de ha az általános tag 0, akkor az egyik gyök 0, a másik pedig egy elsőfokú egyenlet gyöke, és mint ilyen, mindig racionális.

Tehát ha b-t úgy választjuk meg, hogy $b = t$, akkor az

$$x(a^2 + 1) - 2at = 0$$

elsőfokú egyenlethez jutunk, amely lényegében azonos az I. megoldásban nyert egyenlettel, de itt nem használtunk fel koordináta–geometriát.

Pogány Eörs (Bp. XI., József Attila g. II. o. t.)

Megjegyzés: Igen sok megoldó jónak gondolta a következő rossz bizonyítást: »Pythagoras tétele kimondja, hogy az átfogó négyzete egyenlő a befogók négyzetének összegével a derékszögű háromszögben. Thales tétele szerint viszont adott (jelen esetben racionális) c átmérő fölé rajzolt félkör bármely pontját összekötve az átmérő két végpontjával derékszögű háromszöget kapunk, tehát c^2 végtelen sokszor bontható fel két racionális szám négyzetének összegére.«

Itt természetesen az a hiba, hogy semmi sem biztosít minket arról, hogy a kapott derékszögű háromszögek közül akár csak egyetlenegynek is két befogója racionális számmal mérhető. Ezt külön be kellene bizonyítani. Így ez a »megoldás« lényegében csak átfogalmazása a feladatnak.