I. megoldás: Az

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

azonosság mindkét oldalából vonjuk ki az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ összeget, de a jobboldalon úgy csoportosítva a tagokat, hogy $\frac{1}{2k}$-ból vonjuk ki az $\frac{1}{k}$-t
($k=1,2,\ldots,n$).

Így kapjuk

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}&=1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\\&+\frac{1}{2n-1}+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\\&+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\\&+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

Ebből azonban tételünk helyessége közvetlenül leolvasható, hiszen a jobboldal első tagja $\frac{1}{2}$, míg az összes többi tag pozitív.

Farkas László (Ózd, József A. g. II. o, t.)

II. megoldás: Teljes indukcióval is célhoz érünk.

$$s_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}.$$

Tegyük fel, hogy

$$s_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}>\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}s_{k+1}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}&=\\=s_k-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=s_k+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}&=\\=s_k+\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}>s_k>\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

De mivel $k=2$-re, mint láttuk, $s_2>\frac{1}{2}$, azért tételünk minden 1-nél nagyobb természetes számra igazolt.

Szeidl Béla (Bp, VIII., Apáczai Csere g. II, o, t.)

III. megoldás: Az

$$s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

összeget csökkentjük, ha minden $\frac{1}{2n}$-től különböző tag helyébe (ilyen mindig van, ha $n>1$) a kisebb $\frac{1}{2n}$-t írjuk, tehát

$$s_n>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Csiszár Imre (Budapest, I., Petőfi g. II, o. t.)