Egyenletünk így is írható

$$2^3 \cdot 2^{10x+4y-496} - 9 \cdot 2^{5x+12y-248} + 1 = 0.$$

Legyen $2^{5x+12y-248} = p$, akkor

$$8p^2 - 9p + 1 = 0,$$

ahonnan

$$p_1 = 1 = 2^0, \qquad \text{és} \qquad p_2 = \frac{1}{8} = 2^{-3}.$$

Tehát vagy

(1) $$5x + 12y - 248 = 0$$

vagy

(2) $$5x + 12y - 248 = -3$$

Határozzuk meg az (1) alatti határozatlan egyenlet egész megoldását.

$$\begin{aligned}
&x = \frac{248-12y}{5} = 49 - 2y + \frac{3-2y}{5} = 49 - 2y + t,\\
&y = \frac{3-5t}{2} = 1 - 2t + \frac{1-t}{2} = 1 - 2t + u.\\
&t = 1 - 2u.
\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve

$$\begin{aligned}
&x = 1 - 2 + 4u + u = 5u - 1,\\
&y = 49 - 10u + 2 + 1 - 2u = 52 - 12u.
\end{aligned}$$

Tehát $x + y = 51 - 7u$, és a feladat szerint (0-t is természetes számnak tekintve)

$$0 \leqq 5u - 1 \qquad 0 \leqq 52 - 12u \qquad \text{és} \qquad 40 < 51 - 7u$$

vagyis

$$\frac{1}{5} \leqq u \qquad u \leqq \frac{13}{3} \qquad \text{és} \qquad u \leqq \frac{11}{7}.$$

E három egyenlőtlenségnek csak $u = 1$ tesz eleget, tehát

$$x_1 = 5 - 1 = 4, \qquad \text{és} \qquad y_1 = 52 - 12 = 40$$

egy megoldás.

A (2) alatti

$$5x + 12y - 245 = 0.$$

egyenletből nyerjük, hasonlóképpen, hogy

$$\begin{aligned}
&x = 49 - 12u \geqq 0,\\
&y = 5u \geqq 0,\\
&x + y = 49 - 7u > 40.
\end{aligned}$$

E három egyenlőtlenségből rendre

$$u \leqq \frac{49}{12}, \quad u \geqq 0 \quad u < \frac{9}{7},$$

amely egyenlőtlenségeknek $u = 0$, és $u = 1$ tesz eleget.

Tehát további két megoldás:

$$x_2 = 49, \qquad y_2 = 0;$$

és

$$x_3 = 47 - 19 = 37, \quad y_3 = 5.$$

Kovács István (Kecskemét, Ságvári szakéretts. koll.)