I. megoldás: Legyenek a háromszög oldalai a, b, c, a megfelelő magasságok m_a, m_b, m_c, a kerülete $a+b+c=2s$, a területe t, a beírt kör sugara ϱ. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{1}{2\varrho}<\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}<\frac{1}{\varrho}.$$

Mivel ismeretes, hogy $am_a=bm_b=2s\varrho=2t$, azért egyenlőtlenségünk így írható

$$\frac{s}{2t}<\frac{a}{2t}+\frac{b}{2t}<\frac{s}{t}.$$

$4t$-vel szorozva

$$2s=a+b+c<2a+2b<4s=2a+2b+2c,$$

vagyis

$$c<a+b<a+b+2c.$$

Ez nyilvánvalóan igaz, és mivel egyértelműen megfordítható, átalakításokat végeztünk, azért a kiindulásunk helyessége be van bizonyítva.

Győrősi Péter (Bp., IV., Könyves Kálmán g. II. o. t.)

II. megoldás: Az előbbiek alapján

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}=\frac{a}{2t}+\frac{b}{2t}=\frac{a+b}{2s\varrho}=\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

De nyilván

$$\frac{a+b}{a+b+c}<1,$$

és (mivel $c<a+b$)

$$\frac{a+b}{a+b+c}>\frac{a+b}{a+b+(a+b)}=\frac{1}{2},$$

és így

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varrho}<\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}<\frac{1}{\varrho}.$$

III. megoldás: Induljunk ki a következő nyilvánvalóan helyes egyenlőtlenségekből

$$s<a+b<2s.$$

Osszunk $2t$-vel

$$\frac{s}{2t}<\frac{a}{2t}+\frac{b}{2t}<\frac{s}{t}.$$

De ismeretes, hogy

$$\frac{t}{s}=\varrho,\quad \frac{2t}{a}=m_a,\quad \frac{2t}{b}=m_b$$

és így

$$\frac{1}{2\varrho}<\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}<\frac{1}{\varrho}.$$

Orlik Péter (Bp., V., Eötvös g. II. o. t.)