I. megoldás: Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $2(1+x)^4$-nel ($x \neq -1$) és a jobboldalt alakítsuk át polinommá

$$2+2x^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4,$$

azaz

$$x^4-4x^3-6x^2-4x+1=0. \tag{1}$$

Osszuk az egyenletet x^2-tel ($x \neq 0$) és csoportosítsuk át a tagokat:

$$x^2+\frac{1}{x^2}-4x-\frac{4}{x}-6=0,$$

vagyis

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0.$$

Legyen $x+\frac{1}{x}=y$, akkor $y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$,
és így

$$y^2-2-4y-6=0,$$

vagyis

$$y^2-4y-8=0,$$

amiből

$$y_1=2+2\sqrt{3}, \qquad y_2=2-2\sqrt{3}.$$

Az első esetben

$$x+\frac{1}{x}=2+2\sqrt{3},$$

vagyis

$$x^2-(2+2\sqrt{3})x+1=0,$$

ahonnan

$$x_1=1+\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}, \qquad x_2=1+\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}}.$$

A második esetben

$$x+\frac{1}{x}=2-2\sqrt{3},$$

azaz

$$x^2-(2-2\sqrt{3})x+1=0,$$

amiből

$$x_3=1-\sqrt{3}+\sqrt{3-2\sqrt{3}}, \qquad x_4=1-\sqrt{3}-\sqrt{3-2\sqrt{3}}.$$

Az x_1 és x_2 nyilván valós gyök, míg x_3 és x_4 komplex gyök, mert $3-2\sqrt{3}<0$.

Szeidl Béla (Bp., VIIL, Apáczai Csere g. II. o. t.)

Megjegyzés: x_3 és x_4 kiszámítása nélkülözhető lett volna; mert tudjuk, hogy pozitív x-re $x+\frac{1}{x}>2$, negatív x esetén tehát $x+\frac{1}{x}<-2$, viszont $-2<2-2\sqrt{3}<-1$, mert $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$-re, $3<\sqrt{12}<4$. Így valós x-re nem lehet $x+\frac{1}{x}=2-2\sqrt{3}$.

II. megoldás: Az I. megoldásban (1) alatt szereplő szimmetrikus egyenlet mindkét oldalához $12x^2$-et adva, a baloldal teljes négyzetté válik:

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+1=12x^2,$$

azaz

$$(x^2-2x+1)^2=12x^2,$$

amiből

$$x^2-2x+1=\pm 2\sqrt{3}x.$$

A jobboldalon a felső előjelet tekintetbe véve:

$$x^2-(2+2\sqrt{3})x+1=0, \quad \text{azaz} \quad \left[x-(1+\sqrt{3})\right]^2-2\sqrt{3}-3=0,$$

az alsó előjellel számolva

$$x^2-(2-2\sqrt{3})x+1=0, \quad \text{azaz} \quad \left[x-(1-\sqrt{3})\right]^2+2\sqrt{3}-3=0.$$

Az első egyenlet gyökei tehát valósak: $x_{1,2}=1+\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}+3}$, a másodikéi azonban nem, mert $2\sqrt{3}>3$.

Bartha Gyöngyi (Bp., VIII., Apáczai Csere g. I. o. t.)