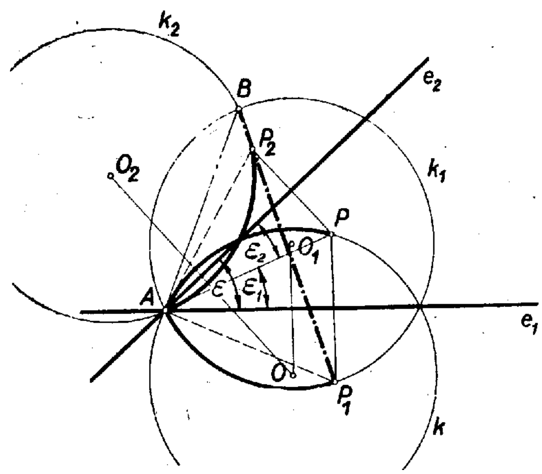
**I. megoldás:** Legyen a két egyenes $e_1$ és $e_2$. Miközben a $P$ pont egy, a két egyenes $A$ metszéspontján átmenő, $k$ kört írt le, tükörképei $P_1$, ill. $P_2$ ezen $k$ körnek tükörképeit: a $k_1$ és $k_2$ kört írják 1e (1. ábra).




*1. ábra*

A $k_1$ és $k_2$ körök $A$-n kívül még egy $B$ pontban metszik egymást, mely $B$ pont a $k$, $k_1$, $k_2$ körökkel és az $A$ ponttal együtt rögzített állandó.

Ha kimutatjuk, hogy a $B$, $P_1$ és $P_2$ pontok egy egyenesen vannak, akkor tételünket bebizonyítottuk.

Két esetet kell megkülönböztetni:

1. $P_1$ és $P_2$ az $AB$ egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak (1. ábra), vagy

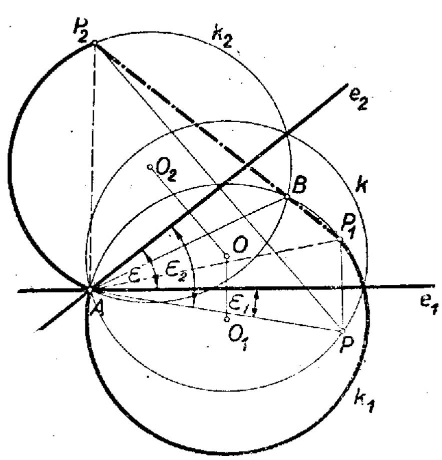
2. az $AB$ egyenes a $P_1$ és $P_2$, pontokat szétválasztja (2. ábra).

Mivel a tükrözés folytán

$$\widehat{AP} = \widehat{AP}_1 = \widehat{AP}_2 \tag{1}$$

(1. ábrán vastagítva), azért az

1. esetben (1. ábra) a kerületi szögek tétele alapján $ABP_1\sphericalangle = ABP_2\sphericalangle$. E két egyenlő szögnek azonban az $AB$ szára közös, tehát közös a másik szára is, vagyis $BP_1$ és $BP_2$ azonos egyenesek.




*2. ábra*

A 2. esetben $ABP_1\sphericalangle$ és $ABP_2\sphericalangle$ olyan köríveken nyugvó kerületi szögek (a 2. ábrán vastagítva), amelyeknek összege (1) alapján egy teljes kör és így ismét a kerületi szögek tétele alapján

$$ABP_1\sphericalangle + ABP_2\sphericalangle = 180°,$$

ami ismét azt jelenti, hogy a $B$, $P_1$ és $P_2$ pontok egy egyenesen feküsznek.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $P_1P_2$ egyenes a $B$ pont körül forog.

*Györösi Péter* (Bp., IV., Könyves Kálmán g. II. o. t.)

**II. megoldás:** Jelöljük az $e_1$ és $e_2$ egyenesek szögét $\varepsilon$-nal. A tükrözés folytán $AP = AP_1 = AP_2$, vagyis a $P_1AP_2\triangle$ egyenlő szárú és a $P_1\sphericalangle = P_2\sphericalangle$. Az $A$ csúcsnál fekvő szögéről meg fogjuk mutatni, hogy (a $P$ helyzetétől független) állandó. Ugyanis, ha az $AP$ egyenesnek az $e_1$ illetőleg $e_2$ vel bezárt hegyes szögeit $\varepsilon_1$ és $\varepsilon_2$-vel jelöljük, akkor a tükrözés miatt $PAP_1\sphericalangle = 2\varepsilon_1$ és a $PAP_2\sphericalangle = 2\varepsilon_2$, vagyis az I. esetben, amikor a $P$ a hegyesszög szárai között van (1. ábra)

$$P_1AP_2\sphericalangle = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 2\varepsilon,$$

míg a II. esetben, mikor a $P$ a tompaszög szárai között van (2. ábra)

$$P_1AP_2\sphericalangle = 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = 2\varepsilon.$$

A $P_1AP_2\triangle$ $A\sphericalangle$-e tehát mindenkor $2\varepsilon$ állandó nagyságú, következésképpen a $P_1\sphericalangle = P_2\sphericalangle$ is állandó nagyságú, vagyis $P_1AP_2$ egyenlőszárú háromszögek egymásközt mind hasonlók. (A $P$ pont mozgásával a $P_1AP_2\triangle$ nagyságra változik, de alakra változatlan marad.)

$AP_1P_2\sphericalangle = AP_2P_1\sphericalangle$ állandó nagyságú szögek $P_1A$, ill. $P_2A$ szárának a $k_1$ és $k_2$ körökkel való metszéspontja az $A$ pont rögzített, tehát a másik száruknak ($P_1P_2$, illetőleg $P_2P_1$) metszéspontja a $k_1$ és $k_2$ körökkel egy-egy szilárd pont az illető körön. A változó $P_1P_2$ egyenes csak úgy mehet át állandóan 2 szilárd ponton, ha a 2 szilárd pont egybeesik a $k_1$ és $k_2$ közös $B$ pontjában.

*Kozma Tibor* (Győr, Czuczor Gergely g. I. o. t.)