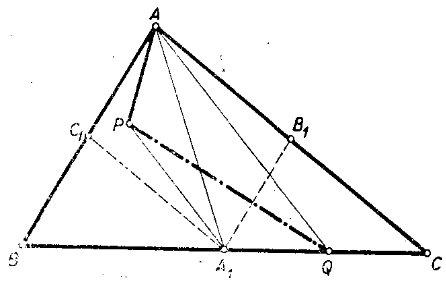
a) Tekintsük a feladatot megoldottnak olyan esetben, amikor a Q pont az A csúccsal szemközt fekvő a oldalon van (1. ábra). A háromszög területét jelöljük t-vel és az oldalfelező pontok legyenek rendre A_1, B_1, C_1,.

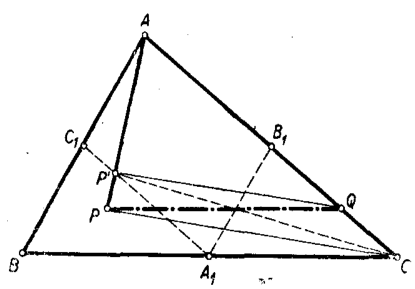


1. ábra

Az $APQC$ négyszög területe, tehát a feltétel szerint $\frac{t}{2}$, az $AA_1C\triangle$ területe pedig szükségképpen $\frac{t}{2}$. E két idomnak egy közös része az $ACQ\triangle$, tehát területileg $AQP\triangle = AQA_1\triangle$, amiből következik, hogy $PA_1 \parallel AQ$. Nyilvánvaló, hogy a P pont ebben az esetben csak az $AB_1A_1C_1$ paralelogrammán belül lehet.

De megfordítva is, ha a P pont az $AB_1A_1C_1$ paralelogrammán belül van, akkor megszerkesztve az A ponton át PA_1-gyel húzott párhuzamost ez a szemközti a oldalból nyilván a feltételeknek megfelelő Q pontot metszi ki. Ez az 1. típusú megoldás: a háromszög egy konvex és egy konkáv négyszögre bomlik.

b) Tekintsük most azt az esetet, amikor P pl. az $A_1BC_1\triangle$-ben van. Ekkor Q mint láttuk, nem lehet a-n, de nyilván c-n sem, tehát Q a b-n van (2. ábra). Jelöljük az AP egyenes metszéspontját az A_1C_1 szakasszal P'-vel.



2. ábra

Az $APQ\triangle$ területe a feltétel szerint, az $AP'C\triangle$ területe pedig szükségképpen $\frac{t}{2}$. A két egyenlő területű háromszögnek egy közös része az $AP'Q\triangle$, és így területileg $P'QP\triangle = P'QC\triangle$, vagyis $PC \parallel P'Q$.

Tehát a szerkesztés menete, ha a P pont nincs a fenti paralelogramma belsejében: Meghatározzuk az AP metszéspontját P'-t a jelzett paralelogrammával P'-n át PC illetőleg PB-vel (aszerint, amint P az A_1C_1 ill. A_1B_1 oldalon van) húzott párhuzamos metszi ki a b ill. c oldalon a keresett Q pontot. Ez a 2. típusú megoldás: a háromszög egy háromszögre és egy konkáv ötszögre bomlik.

A háromszög egy csúcspontját kiragadva, tehát mindig van 1 és csakis 1 megoldás. Ha mindhárom csúcspontot tekintjük, akkor minden P ponthoz mindig találunk 3 és csakis 3 megoldást. Ha a P pont az $A_1B_1C_1$ háromszög belsejében van, akkor mind a három megoldás 1. típusú. Különben csak egy megoldás 1. típusú (a P-hez legközelebbi csúcspontra vonatkozó), a másik kettő 2. típusú. Ha a P pont rajta van az $A_1B_1C_1$ kerületén, akkor két megoldás egybeesik úgy, hogy Q az adott háromszög egy-egy csúcspontjába kerül (a háromszög felbomlik egy háromszögre, és egy konkáv négyszögre), a harmadik megoldás 1. típusú. Ha P rajta van valamely súlyvonalon, akkor az egyik Q pont a súlyvonal talppontja (az eredeti háromszög két háromszögre bomlik), végül ha P azonos a súlyponttal akkor a három Q pont azonos az A_1, B_1, C_1 pontokkal.