$290\,304 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 7$.

1) $a^2-1=(a-1)(a+1)$. Mivel a páratlan, azért $a-1$ és $a+1$ két egymásután következő páros szám, melyek közül az egyik 4-gyel is osztható. Tehát a^2-1 osztható $2\cdot 2^2=2^3$-nal. Továbbá $a-1$, a, $a+1$ három egymásután következő szám, melyek közül az egyik feltétlenül osztható 3-mal, de a feltétel szerint a nem lehet osztható 3-mal, tehát a másik két tényező egyike osztható 3-mal. Mivel 2^3 és 3 relatív szám, azért a^2-1 osztható $2^3\cdot 3$-mal és így

$$(a^2-1)(b^2-1) \quad \text{osztható} \quad 2^6\cdot 3^2\text{-nel.}$$

2) $a^6-b^6=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$. Mivel a és b sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható, ezért $a=6p\pm 1$, $b=6q\pm 1$ alakú és így

$$\begin{aligned} a^2-b^2=(6p\pm 1)^2-(6q\pm 1)^2 &= 36(p^2-q^2)\pm 12(p-q)= \\ &=12\big[3(p+q)\pm 1\big](p-q). \end{aligned}$$

Ha $p-q$ páros, a^2-b^2 osztható $12\cdot 2=24$-gyel, ha $p-q$ páratlan, akkor $3(p+q)\pm 1$ páros, vagyis a^2-b^2 ez esetben is osztható 24-gyel. Tehát

$$a^6-b^6 \ \text{ feltétlenül osztható } \ 2^3\text{-nal.}$$

3) $a^6-b^6=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)=(a^2-b^2)\big[(a^2-b^2)^2+3a^2b^2\big]$. Mivel a feltétel szerint $a=3p\pm 1$ és $b=3q\pm 1$ alakú, azért $a^2=9p^2\pm 6p+1=3p'+1$ és $b^2=3q'+1$ alakú, vagyis $a^2-b^2=3(p'-q')$ és így $\big[(a^2-b^2)^2+3a^2b^2\big]$ is osztható 3-mal. Tehát

$$a^6-b^6 \ \text{ osztható } \ 3^2\text{-nal.}$$

4) Mivel sem a, sem b 7-tel nem osztható, azért

$$\begin{aligned} a&=7p\pm 1 \ \text{ vagy } \ 7p\pm 2 \ \text{ vagy } \ 7p\pm 3, \\ \text{és } \ b&=7q\pm 1 \ \text{ vagy } \ 7q\pm 2 \ \text{ vagy } \ 7q\pm 3. \end{aligned}$$

De a binomiális tétel alapján

$$\begin{aligned} (7k\pm 1)^6 &= 7A+1 \\ (7k\pm 2)^6 &= 7B+64=7(B+9)+1 \\ (7k\pm 3)^6 &= 7C+729=7(c+104)+1 \end{aligned}$$

és így $a^6-b^6=7D$ alakú, vagyis

$$a^6-b^6 \ \text{ osztható } \ 7\text{-tel.}$$

1), 2), 3) és 4) alapján

$$\begin{aligned} (a^2-1)(b^2-1)(a^6-b^6) \qquad \text{osztható} \quad 2^6\cdot 3^2\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 7 &= \\ =2^9\cdot 3^4\cdot 7=290\,304\text{-gyel.} \end{aligned}$$

Tóth Ágota (Pécs, Közg. techn. II. o. t.)

Megjegyzés: Mivel a bizonyításnál csak azt használtuk ki, hogy a és b nem osztható 2-vel, 3-mal és 7-tel, azért – a 7-nél nagyobb prímszámokon kívül – ezen feltételeknek eleget tevő összetett számokra is igaz állításunk. Tehát többet bizonyítottunk, mint a feladat megkövetelt.

Biczó Géza (Bp., II., Rákóczi g. II. o. t.)