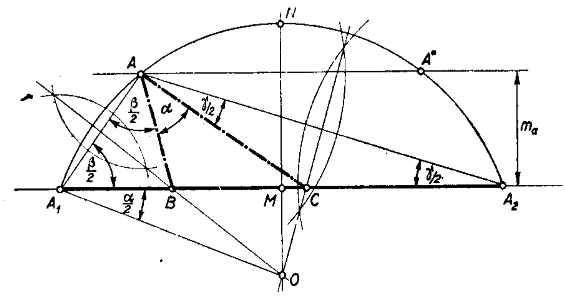
I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ha a $BC = a$ oldalt B-n túl a $BA_1 = BA = c$ oldallal és C-n túl $CA_2 = CA = b$ oldallal meghosszabbítjuk, akkor az A_1BA és az A_2CA egyenlőszárú háromszögekben az alap mellett fekvő szögek $\frac{\beta}{2}$ ill. $\frac{\gamma}{2}$, mert két belső szög összege egyenlő a szemközt fekvő külső szöggel. Az $A_1AA_2\triangle$-ben tehát az A_1A_2 oldal a háromszög kerülete és az $A\sphericalangle = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{180^\circ+\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Tehát az A pont egyrészt rajta van az $A_1A_2 = k$ fölé rajzolt olyan látóköríven, melynek pontjaiból az A_1A_2 szakasz $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik, másrészt rajta van az A_1A_2 egyenessel párhuzamos és tőle m_a távolságban lévő azon egyenesen, amely A_1A_2-nek ugyanazon az oldalán fekszik mint a látókörív.

A szerkesztés menete tehát: Felvesszük az $A_1A_2 = k$ távolságot. Megszerkesztjük a fenti két mértani helyet. Ezek metszéspontja A (és A^*) a keresett háromszög egyik csúcspontja. Az AA_1 és AA_2 szakaszokat merőlegesen felező egyenesek metszik ki az A_1A_2 távolságból a háromszög B és C csúcspontjait. Csak egy megoldás van, mert A^* az előbbi megoldás tükörképét szolgáltatja az A_1A_2 távolságot merőlegesen felező egyenesre nézve.

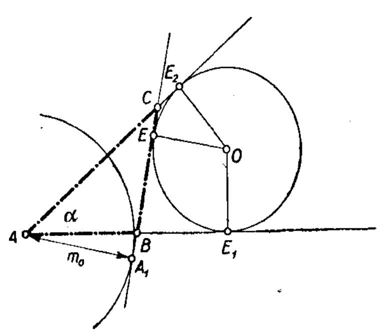
A megoldhatóság feltétele, hogy

$$m_a \leq MN = ON - OM = OA_1 - OM = \frac{A_1M}{\cos\frac{\alpha}{2}} - A_1M \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{2\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{k\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{k}{2}\cdot\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Egyenlőség esetén egyenlőszárú háromszöget nyerünk.

Aujeszky Géza (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

II. megoldás: Ismeretes, hogy a háromszöghöz írt körnek az oldalak meghosszabbításán fekvő érintési pontjai az érintők metszéspontjától félkerület távolságban vannak. Ezt felhasználva a szerkesztés menete a következő: Az adott α szög szárai között olyan kört szerkesztünk, amely az A csúcsponttól $\frac{k}{2}$ távolságban fekvő E_1 és E_2 pontokban érinti a szárakat (2. ábra).



2. ábra

Az A körül m_a sugárral rajzolt kör és az előbbi kör egyik közös belső érintője (érintési pontok A_1 és E) metszi ki a szárakból a keresett háromszög B és C csúcspontjait. Valóban az így nyert háromszög kielégíti feltételeinket: A háromszög kerülete $AB+BE+EC+CA = AB+BE_1+E_2C+CA = AE_1+AE_2 = \frac{k}{2}+\frac{k}{2} = k$ és a $BC = a$ oldalhoz tartozó magasság $AA_1 = m$.

A megoldhatóság feltétele, hogy a két kör ne messe egymást két különböző pontban, vagyis, hogy $m_a \leq AO - OE_1 = \frac{k}{2\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{k}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ stb. mint az I. megoldásban.

Beke Gyula (Hatvan, Bajza József g. I. o. t.)