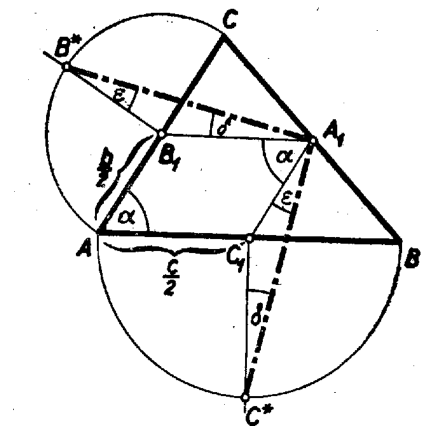
A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Mivel A_1, B_1, C_1 az a, b, c oldalak felezőpontjai, azért $AC_1A_1B_1$ paralelogramma. Feltételezzük, hogy α hegyes szög.

Tehát

$$B_1B^* = B_1A = A_1C_1 = \frac{b}{2},$$
$$C_1C^* = C_1A = A_1B_1 = \frac{c}{2},$$

továbbá az

$$A_1B_1B^*\sphericalangle = 90^\circ + \alpha = A_1C_1C^*\sphericalangle,$$

vagyis

$$A_1B_1B^*\triangle \simeq A_1C_1C^*\triangle,$$

mert a fentiek szerint két oldal és a közbezárt szög egyenlő.

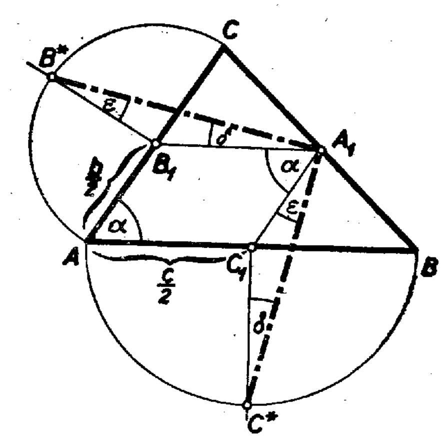
Ezen egybevágóságból viszont következik, hogy a harmadik oldal is egyenlő, vagyis

$$A_1B^* = A_1C^*,$$

ami bizonyítandó volt.

Ha a fenti két egybevágó háromszög hegyes szögeit δ-val és ε-nal jelöljük, akkor a $B^*A_1C^*\sphericalangle = \delta + \alpha + \varepsilon$.

De $(90 + \alpha) + \delta + \varepsilon = 180^\circ$, azért $\delta + \alpha + \varepsilon = 90^\circ$, vagyis a két távolság derékszöget zár be.



2. ábra

Teljesen hasonlóképpen bizonyíthatjuk, hogy tételeink befelé rajzolt félkörök esetén is igazak (2. ábra), csakhogy az egybevágóság bizonyításánál a két egyenlő oldal által bezárt szög (α-t továbbra is hegyesnek tételezve fel) most $90^\circ - \alpha$ hegyes szög (a $90^\circ + \alpha$ tompaszög helyett). Ha a másik hegyesszöget δ-val a tompaszöget pedig ε-nal jelöljük, akkor a két egyenlő távolság által bezárt szög $(\varepsilon - \alpha) + \delta$. De $(90 - \alpha) + \delta + \varepsilon = 180^\circ$, ezért $\varepsilon - \alpha + \delta = 90^\circ$.

Ha α derékszög, akkor a két egybevágó háromszög egyenessé fajul. Ha pedig α tompaszög, akkor a fenti bizonyítás lényegében változatlan, csak α helyett $180^\circ - \alpha$, és így $90^\circ \pm \alpha$ helyett $270^\circ - \alpha$, ill. $\alpha - 90^\circ$ szerepel.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. I. o. t.)