

a) A két szögletes zárójelben lévő kifejezés így írható:

$$\begin{aligned}x^2 + (a + b)x + ab &= (x + a)(x + b), \\x(x - a) - b(x - a) &= (x - a)(x - b).\end{aligned}$$

E két kifejezés 3-szoros szorzata

$$3(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) = 3x^4 + 3a^2x^2 - 3b^2x^2 + 3a^2b^2,$$

és így a kapcsos zárójelben lévő osztandó

$$3a^2x^2 + 3b^2x^2 - 3a^2b^2 + 3x^4 - 3a^2x^2 - 3b^2x^2 + 3a^2b^2 = 3x^4.$$

Tehát a keresett hányados

$$3x^4 : x^2 = 3x^2.$$

b) Mivel $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ és $-(b - a) = a - b$, azért

$$\begin{aligned}\frac{1}{a - b} - \frac{3ab}{a^3 - b^3} - \frac{b - a}{a^3 + b + b^2} &= \frac{a^2 + ab + b^2 - 3ab + (a - b)^2}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)} = \\&= \frac{2a^2 - 4ab + 2b^2}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{2(a - b)^2}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{2(a - b)}{a^2 + ab + b^2}. \\c) \quad \frac{a}{(a - 2b)(a - c)} + \frac{2b}{(2b - c)(2b - a)} + \frac{c}{(c - a)(c - 2b)} &= \\&= \frac{a}{(a - 2b)(a - c)} - \frac{2b}{(a - 2b)(2b - c)} + \frac{c}{(2b - c)(a - c)}.\end{aligned}$$

Ezen összeg bármely két tagjáról kimutatható, hogy egyenlő az ellenkező jellel vett maradék harmadik taggal, feltéve $a \neq c$, $a \neq 2b$, $c \neq 2b$. Pl. az első két tag:

$$\begin{aligned}\frac{a}{(a - 2b)(a - c)} - \frac{2b}{(a - 2b)(2b - c)} &= \frac{a(2b - c) - 2b(a - c)}{(a - 2b)(2b - c)(a - c)} = \\&= \frac{2ab - ac - 2ab + 2bc}{(a - 2b)(2b - c)(a - c)} = -\frac{c(a - 2b)}{(a - 2b)(2b - c)(a - c)} = -\frac{c}{(2b - c)(a - c)},\end{aligned}$$

és így kifejezésünk azonosan egyenlő 0-val.

Rédly Dénes (Pannonhalmi g. II. o. t.)