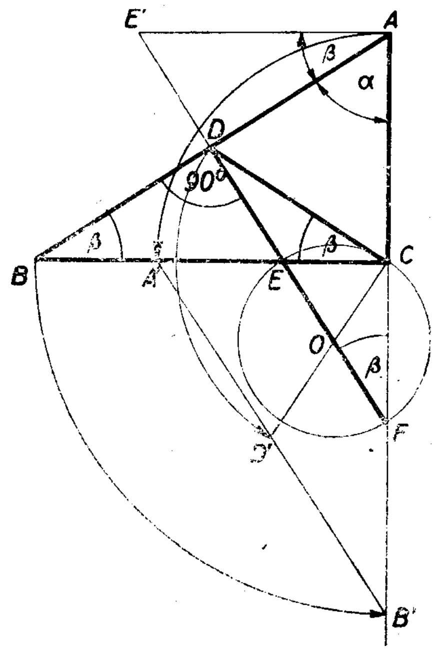
I. megoldás: Az $EFC_\triangle \sim ABC_\triangle$, mert $F\sphericalangle = B\sphericalangle = \beta$, mint merőleges szárú szögek. (L. ábrát)



Az EFC derékszögű háromszög köré írt kör középpontja O az EF átfogó felezőpontja. Bebizonyítjuk, hogy e kör érinti CD-t, vagyis $OC \perp DC$.

Forgassuk el az $ABC_\triangle$-et C pont körül $90°$-kal az $A'B'C$ helyzetbe, akkor az előbbiek alapján $A'B'C_\triangle$ nemcsak hasonló $EFC_\triangle$-höz, hanem hasonló fekvésű is, vagyis $A'B' \parallel EF$ és mivel D' felezi $A'B'$-t, azért CD', a CD-nek $90°$-os elforgatása, átmegy az EF felező pontján O-n, vagyis $OC \perp DC$. Tehát a DC súlyvonal tényleg érintője a körnek és így mértani középarányos a DE és DF szeletek között, vagyis

$$DC^2 = DE \cdot DF.$$

Grätzer György (Bp., V. Berzsenyi g. II. o. t.)

II. megoldás: Mivel $DC = DB$, mint az $ABC_\triangle$köré írt kör sugara, azért a $DCB\sphericalangle = \beta$ és mint már láttuk az I. megoldásban a $CFD\sphericalangle$ is egyenlő β-vel. Ennek alapján a $CDE_\triangle \sim FDC_\triangle$, mert a $C\sphericalangle$ és $F\sphericalangle$ egyenlőségén kívül a $D\sphericalangle$ közös. Tehát

$$DE : DC = DC : DF,$$

amiből

$$DC^2 = DE \cdot DF.$$

Ladányi József (Kisbér, Táncsics g. II. o. t.)

III. megoldás: Mivel (mint az I. megoldásban láttuk) az $AFD\sphericalangle = \beta$, azért az $AFD_\triangle \sim EBD_\triangle$, és így

$$DF : DA = DB : DE.$$

De $DA = DB = DC$, vagyis

$$DC^2 = DE \cdot DF.$$

Tomor Benedek (Győr, Révai g. II. o. t.)

IV. megoldás:

(1) $$DE = DB \text{ tg } \beta = DC \text{ tg } \beta$$

(2) $$DF = DA \text{ cotg } \beta = DC \text{ cotg } \beta$$

(1) és (2) szorzata

$$DE \cdot DF = DC^2 \text{ tg } \beta \cdot \text{ cotg } \beta = DC^2.$$

Gaál István (Csorna, Latinka Sándor g. II. o. t.)

V. megoldás: Tükrözzük a BE szakaszt centrálisan a D pontra nézve. B tükörképe A pontba esik és E tükörképe E' az A és F pontokkal derékszögű háromszöget alkot, mert $\alpha+\beta = 90°$. Ebben a derékszögű háromszögben ismert tétel szerint az átfogóhoz tartozó magasság mértani középarányos az átfogó két metszete között, vagyis $AD^2 = E'D \cdot DF$, de $AD = DC$ és $E'D = DE$ és így

$$DC^2 = DE \cdot DF.$$

Döbrösy László (Bp., V. Piarista g. II. o. t.)