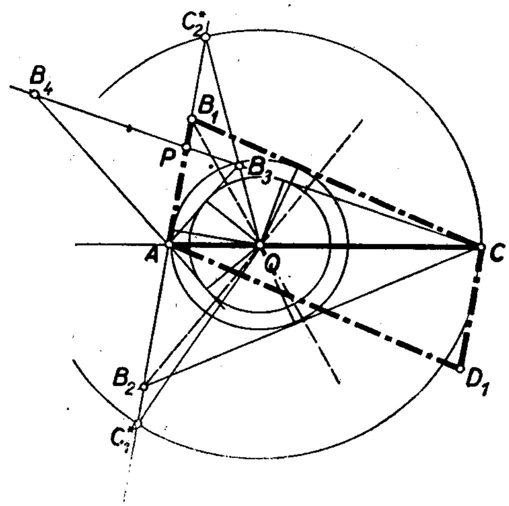
I. megoldás: A Q pont, mint valamely szögfelező egy pontja, egyenlő távolságnyira van a paralelogramma két szomszédos oldalától.



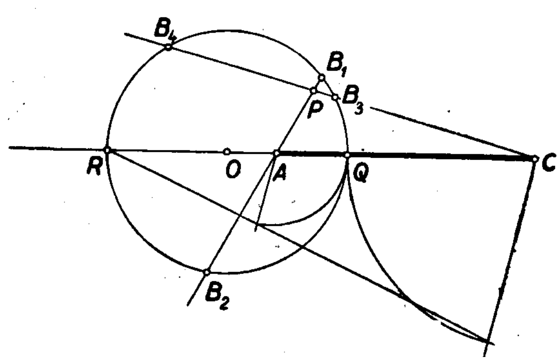
1. ábra

Tegyük fel $AQ < QC$ (1. ábra) és a Q pont a $B\sphericalangle$ felezőjén van. A P pontot az AB oldalon feltételezve, a Q köré szerkesztett kör, mely érinti az $AP(\equiv AB)$ egyenest, érinteni tartozik a BC oldalt is, vagyis a C-ből e körhöz szerkesztett két érintő metszi ki az AP egyenesből a B_1 és B_2 csúcspontokat. E két érintő mindig megszerkeszthető, mert ha $AQ < QC$ a C pont szükségképpen a körön kívül marad. Ha a P pontot a BC oldalon tételezzük fel, akkor teljesen hasonlóan történik a B_3 és B_4 csúcspontok megszerkesztése, de most az A pont kerülhet a Q köré rajzolt kör belsejébe is, mely esetben B_3 és B_4 nem létezik. A paralelogramma negyedik csúcspontja D a B centrális tükörképe az AC felezőpontjára nézve.

Tehát 4 megoldás lehetséges, ha a P pontot olyan paralelogramma-oldalon tételezzük fel, amely szára annak a szögnek, amelynek felezője átmegy a Q ponton. (L. megjegyzést a IV. megoldás után.) Ha a Q köré rajzolt, CP egyenest érintő kör átmegy az A-n, akkor a megoldások száma 3, mert B_3 és B_4 egybeesik. Ha pedig A az utóbbi körnek belsejébe kerül, akkor a megoldások száma 2.

II. megoldás: Mivel a szögfelező az átlót olyan részekre osztja, amelyek aránya egyenlő a mellettük fekvő oldalak arányával, azért a keresett B csúcspont olyan Apollonius–körön fekszik, melynek minden X pontjára nézve

$$\frac{XA}{XC} = \frac{QA}{QC}.$$



2. ábra

Megszerkesztjük az Apollonius-kört (2. ábra), melyből az AP és CP egyenesek metszik ki B_1, B_2, B_3 és B_4 pontokat. $AQ < QC$ esetén az AP mindig 2 különböző pontban metszi az Apollonius-kört, de a CP esetleg csak érinti (3 megoldás, $B_3 \equiv B_4$), vagy nem metszi (2 megoldás). 3 megoldást kapunk akkor is, ha P rajta van az Apollonius-körön.

Ha Q az AC felezőpontja, akkor az Apollonius-kör az AC távolságot merőlegesen felező egyenessé fajul (2 megoldás: rombusz). Ha még azonkívül a P rajta van az utóbbi egyenesen, akkor egy triviális rombuszmegoldást kapunk.

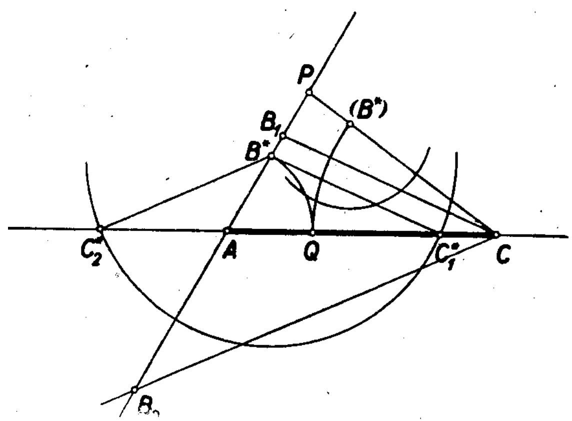
Tahy Péter (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

III. megoldás: Tükrözzük a $CQB_1\triangle$-et a B_1Q szögfelezőre nézve, akkor a C tükörképe C_1^* rákerül a $B_1A \equiv AP$ egyenesre és $QC_1^* = QC$ (1. ábra). Tehát a Q köré QC sugárral rajzolt kör metszi ki az AP egyenesből a C_1^* és

C_2^* tükörképet. (C_2^* a B_2Q szögfelezőre nézve C tükörképe.) A CC_1^* és CC_2^* felező merőlegesei metszik ki AP-ből a keresett B_1 és B_2 pontot. Ugyanígy kaphatjuk a B_3 és B_4 pontokat, ha Q köré QA sugárral rajzolunk kört, de ez nem metszi szükségképpen a CP-t, ha $AQ < QC$.

Kardos Péter (Szolnok, 16. sz. gépip. techn. II. o. t.)

IV. megoldás: A keresett $ACB_\triangle$-hoz hasonló háromszöget szerkesztünk. A $PAC\sphericalangle = BAC\sphericalangle$ adott, és tudjuk, hogy $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{QA}{QC}$.



3. ábra

Tehát AP-re felmérjük az $AB^* = AQ$ távolságot (3. ábra) és B^* köré QC sugárral rajzolt kör kimetszi az AC egyenesből a C_1^* és C_2^* pontokat. (Mindig van két különböző metszéspont, ha $AQ < CQ$). A C ponton át C_1^*B, ill. C_2^*B egyenesekkel párhuzamos egyenesek metszik ki az AP-ből a B_1 és B_2 pontokat. Hasonlóképpen szerkeszthetjük a B_3 és B_4 pontokat a CP egyenesen, de itt nincs mindig megoldás, mert lehet, hogy a CP-n levő (B^*) pont köré rajzolt QA sugarú kör nem metszi az AC egyenest, amint ezt a 3. ábra mutatja.

Deseő Zoltán (Bp. X., I. László g. II. o. t.)

Megjegyzés: Eddig az összes megoldásokban a P pontot a $B\sphericalangle$ szárain tételeztük fel. De a feladat szövegezése szerint lehet a P pont a $D\sphericalangle$ szárain (AD, ill. BD oldalakon) is, amely szögnek felezője *nem* megy át a Q ponton. Ez esetben a P-nek az AC felezőpontjára vonatkozó tükörképével, P'-vel végzendő el a szerkesztés és további, legfeljebb 4 megoldást kaphatunk. Összesen tehát 8 megoldás lehetséges. Ezek közül 4 paralelogramma egy–egy oldala az AP egyenesen, a másik 4 megoldás egy–egy oldala a CP egyenesen van.