I.megoldás: Legyen $PB = x$, akkor $PA = 2x$. A szelő metszeteinek mértani közepe a P-ből húzott érintőszakasz $PE = t$ (1. ábra).

Tehát $x \cdot 2x = t^2$, amiből $x = \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{t}{2}\sqrt{2}$. x tehát olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói $\frac{t}{2}$ hosszúságúak. A P köré x sugárral rajzolt kör metszi ki az adott körből a B_1 és B_2 pontokat. A megoldhatóság feltétele: Az adott kör középpontját O-val, sugarát r-rel jelölve, kell, hogy $OP > r$ és $OP < x + r$, vagyis $x = \frac{t}{2}\sqrt{2} > OP - r$. Mindkét oldal pozitív lévén

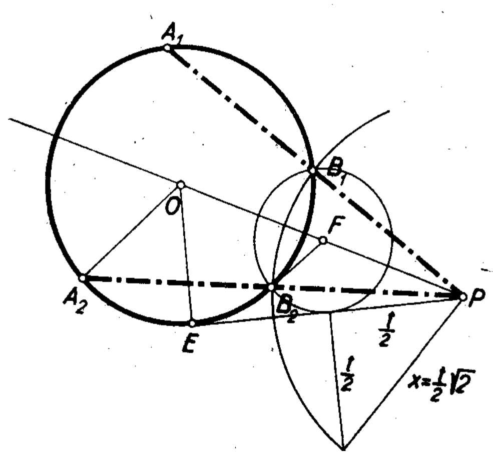
$$t^2 > 2(OP - r)^2.$$

De $t^2 = OP^2 - r^2$, és így $OP^2 - r^2 > 2 \cdot OP^2 - 4 \cdot OP \cdot r + 2r^2$
vagyis

$$OP^2 - 4 \cdot OP \cdot r + 3r^2 = (OP - r)(OP - 3r) < O$$

Ebből következik, hogy $r < OP < 3r$ esetén 2 különböző megoldás van. (Az $OP = r$, ill. $OP = 3r$ egyenlőségeket is megengedve, egy-egy elfajuló, ill. triviális megoldáshoz jutunk.)

Schmidt Eligius (Bp. I., Fürst S. g. II. o. t.)



1. ábra

II.megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak (1. ábra). A B_2 ponton át A_2O-val húzott párhuzamos az OP távolságot annak felezőpontjában, F-ben metszi és $FB_2 = \frac{OA_2}{2} = \frac{r}{2}$. Tehát az OP távolság F felezőpontja köré $\frac{r}{2}$ sugárral rajzolt kör metszi ki az adott körből a B_1 és B_2 pontokat.

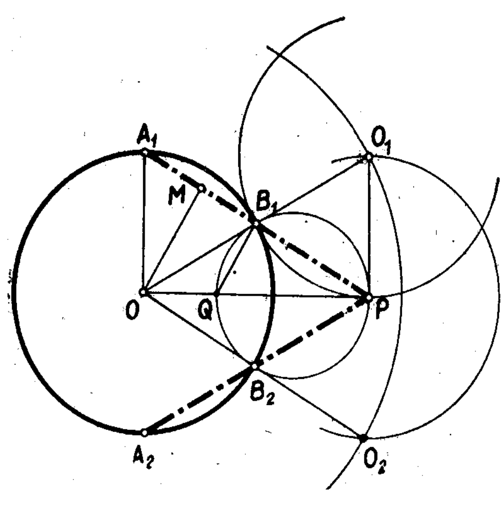
Feladatunk megoldható, ha az $OFB_{2\triangle}$ szerkeszthető, vagyis

$$r - \frac{r}{2} < OF < r + \frac{r}{2}, \quad \text{azaz (mivel} \quad 2OF = OP) \qquad r < OP < 3r.$$

Huszár Károly (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

A hasonlósági transzformáción alapuló megoldások legnagyobb része lényegileg megegyezik ezzel a megoldással.

III. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak (2. ábra). Jelöljük M-mel az A_1B_1 húr felezőpontját. B_1-en át OM-mel húzott párhuzamos messe OP-t Q pontban.



2. ábra

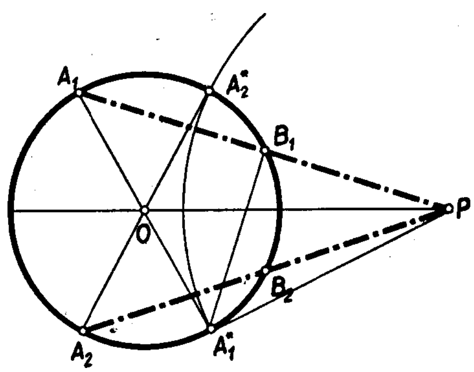
A feladat szerint $PB_1 : PM = 2 : 3 = PQ : PO$, amiből $PQ = \frac{2}{3}PO$.
Mivel $OM \perp PM$, azért QB_1 is merőleges PB_1-re, vagyis a B_1 pont a PQ fölé, mint átmérő fölé rajzolt Thales-körön van. A szerkesztés menete tehát: megszerkesztjük a Q pontot és a PQ fölé rajzolt Thales-kör metszi ki az adott körből a keresett B_1 és B_2 pontokat.

A szerkesztés elvégezhető, ha amellett, hogy P az adott körön kívül van (feladatunk kikötése), Q az adott körön belül van, vagyis $OQ = \frac{OP}{3} < r < OP$, azaz $r < OP < 3r$.

Rácz Márton (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

IV. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. Tükrözzük az adott kört a B pontra. Az A pont centrális tükörképe feladatunk értelmében nyilván a P pont és az egész kör tükörképe az adott körrel egybevágó kör, mely átmegy a P-n és érinti B-ben az adott kört. A tükörkép középpontja ezek szerint az O köre $2r$ és P köré r sugárral rajzolt körök metszéspontja O_1 és O_2 (2. ábra). Az OO_1 és OO_2 centrális egyenesek metszik ki az adott körből a keresett B_1 és B_2 pontokat. A megoldhatóság feltétele, hogy OP, r és $2r$ oldalakból háromszög legyen szerkeszthető, vagyis $2r - r < OP < 2r + r$, azaz $r < OP < 3r$.

Szendrei István (Kunszentmiklós, Damjanich g. I. o. t.)



3. ábra

V. megoldás: Ha a feladatot megoldottnak képzeljük, akkor (3.ábra) a B_1 ponton át a PA_1 szelőre emelt merőleges – Thales tétele alapján – második metszéspontként kimetszi a körből az A_1 pont átellenes pontját A_1^*-ot és $PA_1^* = A_1A_1^* = 2r$. Tehát P köré $2r$ sugárral rajzolt kör metszi ki az adott körből az A_1^* és A_2^* pontokat, amelyeknek átellenes pontjai a keresett A_1 és A_2 pontok. A megoldhatóság feltétele szóról-szóra ugyanaz, mint a IV. megoldásnál.

Beleznay Ferenc (Bp. V., Piarista g. I. o. t.)