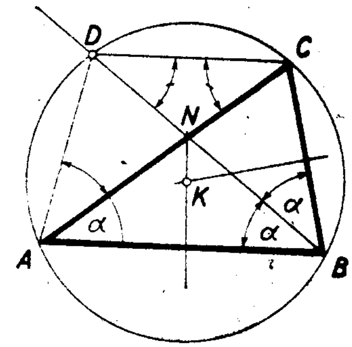
I. megoldás: Képzeljük el a feladatot megoldottnak és rajzoljuk meg a háromszög köré írt kört. (1. ábra.)



1. ábra

Messe a β szög felezője e kört D-ben és az $AC=b$ oldalt N-ben. A kerületi szögek tétele szerint $AD=DC=BC=a$ mert e három húrhoz tartozó körívek mindegyike α kerületi szöget határoz meg. Az $ABCD$ trapéz tehát egyenlő szárú és a fenti oldalakon kívül ismerjük még az $AC=BD$ átlót. Ezen adatokból e trapéz és vele együtt keresett háromszög könnyen megszerkeszthető, feltéve, hogy az $ABC_\triangle(\cong BCD_\triangle)$ egyáltalán szerkeszthető, vagyis feltéve, hogy $a+a>b$, azaz $a>b/2$. Másrészt mivel $\alpha<\beta$ azért $a<b$ és így a megoldhatóság feltétele:

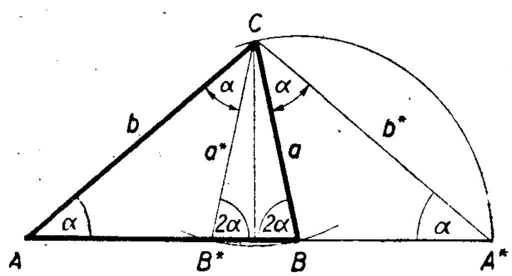
$$\frac{b}{2}<a<b.$$

Németh István (Bp. V., Piarista g. II. o. t.)

II. megoldás: Bebizonyítjuk (körülírt kör nélkül), hogy az α szög nem más, mint egy b alapú és a szárú egyenlő szárú háromszögnek az alap melletti szöge, mely mint olyan, könnyen szerkeszthető. Ez a bizonyítás ismét többféleképpen történhetik.

a) Képzeljük ismét a feladatot megoldottnak (1. ábra). A C csúcsponton át húzzunk az AB oldallal párhuzamos egyenest. A β szög felezője messe ezt a párhuzamos egyenest D-ben és az AC oldalt N-ben. A C és D pontoknál keletkezett, vonalkázott ívvel jelölt, két szög külön-külön, mint váltószög egyenlő α-val. Tehát a BCD, CND és ANB háromszögek egyenlő szárúak, vagyis $CD=BC=a$ és $CD=BN+ND=AN+NC=AC=b$.

b) Ismét a megszerkesztendő háromszögből kiindulva, tükrözzük a C ponthoz tartozó m_c magasság körül pl. az a oldalt (2. ábra.).



2.ábra

2. ábra

B és a tükörképe B^*, ill. a^*, és így $a=a^*$ lévén a BCB^* egyenlő szárú háromszögben mindkét alap mellett fekvő szög 2α. A keletkezett $AB^*C_\triangle$-ben az A-nál fekvő szög α, a B^*-nál fekvő külső szög az előbbiek szerint 2α, tehát a C-nél lévő szög – a külső szögek tétele szerint – szintén α, vagyis $AB^*=B^*C=a$.

Hasonló eredményre jutunk, ha a nagyobbik, b oldalt tükrözzük.

Itt még azt is látjuk, hogy az adott a és b oldalakból megszerkesztve az AB^*C egyenlő szárú háromszöget, a B^*-nak az m_c magasságra vonatkoztatott tükörképe B adja az A és C pontokkal együtt a megoldást.

c) Ha a rövidebb a oldalt lemérem B-ből az AB oldal meghosszabbításaként, vagyis $BA^*=BC=a$, akkor az A^*BC egyenlő szárú háromszögben az A^* és C-nél fekvő szögek külön-külön α-val egyenlők, mert hiszen a B-nél lévő külső szög 2α. Az $A^*CA_\triangle$ tehát egyenlő szárú és így $A^*C=b$.

A megoldhatóság feltétele azonos az I. megoldásnál nyert feltétellel.

Kézdy Pál (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

III. megoldás: Húzzuk meg az elképzelt megoldásban (1. ábra) a β szög felezőjét, a BN távolságot. A $BNC\sphericalangle$, mint az $ABN_\triangle$ külső szöge egyenlő 2α-val, és így $BNC_\triangle\sim ABC_\triangle$, vagyis $AC:BC=BC:NC$, azaz $b:a=a:NC$, miből NC, mint negyedik arányos, könnyen megszerkeszthető.

A megoldhatóság feltétele, hogy a $BCN_{\triangle}$ szerkeszthető legyen. E háromszög oldalai $BC = a$, $NC = \frac{a^2}{b}$ és $BN = b - \frac{a^2}{b}$. Kell tehát, hogy

$$b - \frac{a^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b} < a + \frac{a^2}{b} = \frac{ab + a^2}{b},$$

vagyis

$$b^2 - a^2 < a(b + a),$$
$$b - a < a,$$

miből

$$\frac{b}{2} < a(< b),$$

ami azonos az eddigiekben nyert feltétellel.

IV. megoldás: A sinus-tétel értelmében

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha,$$

miből

$$\cos\alpha = \frac{b}{2a}.$$

Ennek alapján az α szög mindig szerkeszthető, ha $b < 2a$, vagyis $\frac{b}{2} < a$.

Megjegyzés: Mivel másrészt $a < b$, azért ($\cos\alpha$ a legkisebb, ha a a legnagyobb és fordítva)

$$\frac{1}{2} < \cos\alpha < 1$$

Tehát $60° > \alpha > 0°$ és $120° > \beta > 0°$.

Nagykanizsai Irányi D. g. Szakköre.