

I. megoldás: Az egyenlőtlenségeket az $ax^2 + bx + c \geq 0$ alakok egyikére hozzuk. Meghatározzuk a baloldalon álló másodfokú függvények zérushelyeit (vagyis az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökeit). Ha ezek valósak, akkor előállítjuk függvényünket két elsőfokú függvény-szorozataként. (Gyöktényező-s alak.)

$$a) x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2) < 0$$

Két (valós) szám szorzata csak úgy lehet negatív, ha a tényezők ellenkező előjelűek. Jelen esetben tehát kell, hogy $x + 3 > 0$ és $x + 2 < 0$ (fordítva lehetetlen) és így

$$-3 < x < -2.$$

$$b) -x^2 + 9x - 20 < 0, \text{ vagyis, } (-1)\text{-gyel szorozva (az egyenlőtlenség jele megfordul)}$$

$$x^2 - 9x + 20 = (x - 5)(x - 4) > 0.$$

Két (valós) szám szorzata pozitív, ha mindkét tényező egyenlő előjelű. Mindkét tényező pozitív, ha $x > 5$ és mindkét tényező negatív, ha $x < 4$.

$$c) x^2 + x - 56 = (x + 8)(x - 7) < 0.$$

Ehhez szükséges, hogy $x + 8 > 0$ és $x - 7 < 0$ (fordítva lehetetlen), vagyis

$$-8 < x < 7.$$

$$d) 9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2 < 0.$$

Mivel a baloldal mindig pozitív, vagy zéró, azért egyenlőtlenségünknek nincs megoldása.

Kertész Ádám (Bp. I., Fürst Sándor g. I. o. t.)

II. megoldás: A másodfokú egyenlőtlenséget olyan alakra hozzuk, melyben az egyik oldal teljes négyzet.

a) A törtek elkerülésére 4-gyel szorozva

$$4x^2 + 20x + 24 = (2x + 5)^2 - 1 < 0,$$

vagyis

$$(2x + 5)^2 < 1.$$

Egy szám négyzete, akkor kisebb 1-nél, ha -1 és $+1$ közé esik. Tehát $-1 < 2x + 5 < 1$, ahonnan $-6 < 2x < -4$, vagyis

$$-3 < x < -2.$$

b) -4 -gyel szorozva

$$4x^2 - 36x + 80 > 0,$$

$$(2x - 9)^2 - 1 > 0,$$

vagyis

$$(2x - 9)^2 > 1.$$

Egy szám négyzete akkor nagyobb az egységnél, ha abszolút értéke nagyobb 1-nél.

Tehát vagy $2x - 9 > 1$, miből $x > 5$,

vagy pedig $2x - 9 < -1$, miből $x < 4$.

c) Az előzetes szorzás természetesen elmaradhat, legfeljebb törtekkel számolunk.

$$x^2 + x - 56 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 56 < 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{225}{4},$$

miből következik, hogy

$$-\frac{15}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{15}{2},$$

vagyis

$$-8 < x < 7.$$

Kovács László (Debrecen, Ref. Koll. g. II. o. t.)

III. megoldás: Miután a másodfokú egyenlőtlenséget az $ax^2 + bx + c \geq 0$ alakok egyikére hoztuk, a baloldalt függvénynek tekintve, a függvényt ábrázoló paraboláról olvassuk le a megoldást. Ha a függvény zérus-helyei x_1 és x_2 ($x_1 < x_2$), akkor

1.) $a > 0$ esetén a függvény az $x_1 < x < x_2$ intervallumban negatív, és az $x < x_1$, és $x_2 < x$ helyeken pozitív.

2.) $a < 0$ esetben fordítva.

$x_1 = x_2$ esetén az egyenlőtlenségnek vagy minden x érték – az $x_1 = x_2$ érték kivételével – eleget tesz, vagy egyáltalán nincs megoldás.

Ha nincs valós zérushely, akkor vagy minden x érték felel meg, vagy egy sem.

Ezek alapján jelen esetünkben:

a) $x^2 + 5x + 6 < 0$,

ha $-3 < x < -2$.

b) $-x^2 + 9x - 20 < 0$,

ha $x < 4$ vagy $x > 5$.

c) $x^2 + x - 56 < 0$,

ha $-8 < x < 7$.

d) $9x^2 - 12x - 4 < 0$.

Ez esetben nincs megoldás.

Reichlin Viktor (Bp. V., Piarista g. II. o. t.)