Az egyszerűség kedvéért definiáljuk a Fibonacci-sorozatot nempozitív indexekre is úgy, hogy az $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, azaz $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ azonosság ezekre is igaz maradjon:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0; \\ a_{-1} &= a_1 - a_0 = 1 - 0 = 1; \\ a_{-2} &= a_0 - a_{-1} = 0 - 1 = -1; \\ a_{-3} &= a_{-1} - a_{-2} = 1 - (-1) = 2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

A feladat állítása helyett a következőt fogjuk bebizonyítani:

Ha p egy n-edfokú polinom, és $p(1), p(2), \dots, p(n+2)$ a kiterjesztett Fibonacci-sorozat ugyanilyen sorrendben egymás után következő elemei, akkor p főegyütthatója $\frac{1}{n!}$.

A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük.

Először megmutatjuk, hogy a kiterjesztett sorozatban pontosan egyszer szerepel a 0. (Mint láttuk, ez éppen az a_0.)

Tegyük fel, hogy $a_x = 0$, ahol $x < 0$. ($x > 0$ esetén $a_x > 0$). Ekkor a_{x+1} nem lehet 0, mert ellenkező esetben az egész sorozat nullákból állna. Viszont a rekurzió miatt $a_{x+2} = a_x + a_{x+1} = a_{x+1}$, $a_{x+3} = a_{x+1} + a_{x+2} = 2a_{x+1}$, és általában $a_{x+k} = a_k a_{x+1}$ lenne. Mivel $k > 0$ esetén $a_k > 0$, ez $k = -x$ választással azt jelentené, hgoy $a_0 \neq 0$, ami ellentmondás.

A sorozatban tehát csak egyszer szerepel a 0.

Legyen most $n = 0$, azaz p konstans polinom. A feltétel szerint $p(1)$ és $p(2)$ két szomszédos elem: $p(1) = a_k$, $p(2) = a_{k+1}$. Mivel p konstans, $a_k = a_{k+1}$, amiből $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k = 0$. Mint láttuk, ez csak akkor teljesül, ha $k - 1 = 0$, azaz $k = 1$ és $p(x) = a_1 = 1$. Ilyenkor p főegyütthatója $1 = \frac{1}{0!}$, az állítás teljesül.

Tegyük fel, hogy az állítást már bebizonyítottuk $n = (m-1)$-re, és legyen p egy olyan m-edfokú polinom, amelyre $p(1) = a_k, p(2) = a_{k+1}, \dots, p(m+2) = a_{k+m+1}$ valamilyen alkalmas k-val. Legyen

$$p(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Azt akarjuk bebizonyítani, hogy $b_m = \frac{1}{m!}$.

Tekintsük a $q(x) = p(x+1) - p(x)$ polinomot. Erről a következőket állítjuk:

a) a q polinom $(m-1)$-edfokú és a főegyütthatója mb_m;

b) $q(1), q(2), \dots, q(m+1)$ ugyanilyen sorrendben egymás után következő elemei a kiterjesztett Fibonacci-sorozatnak.

a)

$$\begin{aligned} q(x) = p(x+1) - p(x) = \\ &= \big(b_m(x+1)^m + b_{m-1}(x+1)^{m-1} + \dots + b_1(x+1) + b_0\big) - \\ &\quad - \big(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0\big). \end{aligned}$$

A hatványozást elvégezve, a legalább $(m-1)$-edfokú tagok:

$$\left(b_m x^m + \binom{m}{1} b_m x^{m-1} + b_{m-1} x_{m-1}\right) - \big(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1}\big) = m b_m x^{m-1}.$$

Az állítás tehát teljesül.

b) Ha $1 \le j \le m+1$, akkor

$$q(j) = p(j+1) - p(j) = a_{k+j} - a_{k+j-1} = a_{k+j-2},$$

tehát $q(1) = a_{k-1}, q(2) = a_k, q(3) = a_{k+1}, \dots, q(m+1) = a_{k+m-1}$; ez az állítás is teljesül.

Az indukciós feltevés szerint q főegyütthatója $\frac{1}{(m-1)!}$, tehát $mb_m = \frac{1}{(m-1)!}$, vagyis $b_m = \frac{1}{m!}$. Állításunkat ezzel igazoltuk.

A feladat a bizonyított állításnak speciális esete.

Megjegyzések.

1. Az indukció nem működik a sorozat kiterjesztése nélkül, ugyanis $q(1)$ a sorozatban megelőzi $p(1)$-et. Emiatt a $p(1) = a_1$ esetet külön kellene vizsgálni.

2. A polinom értékei is egyértelműek; ez a megoldásból könnyen látható:

$$p(1) = a_{101}, \quad p(2) = a_{102}, \quad \dots \quad p(102) = a_{202}.$$

Ebből az is következik, hogy maga a p polinom is egyértelmű.

3. Az eddigiekből még nem látszik, hogy a feladatnak megfelelő polinom létezik. Ismeretes azonban, hogy pontosan egy olyan legfeljebb 100-adfokú polinom létezik, amelyre $p(1) = a_{101}, \ldots, p(101) = a_{201}$. (Ezt a polinomot Lagrange-interpolációs polinomnak nevezik.) A megoldáshoz hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy p-ben a 100-adfokú tag együtthatója $\frac{1}{100!}$ és $p(102) = a_{202}$.