Tegyük fel, hogy a tetraéder létezik. Ismeretes, hogy egy tetraéder lapjai akkor és csak akkor egybevágóak, ha a köré írt paralelepipedon téglatest. Ismert tétel az is, hogy ha a tetraéder lapjai egybevágóak, akkor a lapok hegyesszögű háromszögek, továbbá, hogy a tetraéder térfogata a körülírt paralelepipedon térfogatának harmada. Ezek a tételek (bizonyítási útmutatással) megtalálhatók a Geometriai feladatok gyűjtemény I. 2088–2090., illetve 2083. feladataiként. Mivel a körülírt paralelepipedon téglatest, a tetraéder szemközti élei egyenlők lesznek. *Ábránk* így készült, amelynek alapján meghatározzuk a paralelepipedon élei hosszát:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2&=c^2\\
y^2+z^2&=b^2\\
z^2+x^2&=a^2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(1)-ből $x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$, amelybe az (1)-ben szereplő egyenletek jobb oldalát helyettesítve:

$$x=\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}},\qquad y=\sqrt{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}},\qquad z=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}.$$

A paralelepipedon térfogata $x\cdot y\cdot z$, ezért a tetraéder térfogata:

$$V=\frac{1}{3}x\cdot y\cdot z=\frac{1}{6\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)\cdot(a^2-b^2+c^2)\cdot(a^2+b^2-c^2)}.$$

Mivel a tetraéder lapjai hegyesszögű háromszögek,

$$a^2<b^2+c^2\quad\text{és}\quad b^2<a^2+c^2\quad\text{és}\quad c^2<a^2+b^2,\tag{2}$$

tehát a négyzetgyökjel alatti tényezők pozitívak.

Maróti Attila (Szeged, Ságvári E. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat szövege szerint természetesnek vehettük, hogy a tetraéder létezik, és ekkor fennáll a (2) feltétel. Megfordítva megmutatható, hogy ha a (2) fennáll, akkor létezik olyan tetraéder, amelynek lapjai a, b, c oldalú egybevágó háromszögek, és egyetlen ilyen tetraéder van.